Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

TENTAMEN I SF1912/1914/1915/1916 SANNOLIKHETSTEORI OCH STATISTIK, ONSDAG 21 DECEMBER 2022 KL 8.00–13.00.

Examinator för SF1912: Mykola Shykula, 08-790 6644.
Examinator för SF1914/1915/1916: Björn-Olof Skytt, 08-790 8649.

Tillåtna hjälpmedel: Formel- och tabellsamling i Matematisk statistik (utdelas vid tentamen), miniräknare.

Tentamen består av två delar, benämnda del I och del II. Del I består av uppgifterna 1-12. På denna del skall endast svar anges, antingen i form av ett numeriskt värde med tre värdesiffrors noggrannhet eller i form av val av ett av de möjliga svarsalternativen. Svaren anges på svarsblanketten. Studenter som är godkända på kontrollskrivningen behöver ej besvara uppgift 1-3, utan får tillgodoräkna sig dessa tre uppgifter (i svarsblanketten anges ordet Bonus). Studenter som är godkända på datorlaborationen behöver ej besvara uppgift 12, utan får tillgodoräkna sig denna uppgift (i svarsblanketten anges ordet Bonus). Detta gäller på ordinarietentan i oktober 2022 och vid omtentamen i december 2022. Gränsen för godkänt är 9 poäng. Möjlighet att komplettera ges för tentander med 8 poäng.
Del II består av uppgifterna 13-16 och varje korrekt lösning ger 10 poäng. Del II rättas bara för studenter som är godkända på eller får komplettera del I och poäng på del II krävs för högre betyg än E. På denna del skall resonemang och uträkningar skall vara så utförliga och väl motiverade att de är lätta att följa. Införda beteckningar skall förklaras och definieras och numeriska svar skall anges med minst två värdesiffrors noggrannhet. Studenter som är godkända på datorlaborationen får 3 bonuspoäng på del II på ordinarie tentamenstillfället och vid omtentamen i december 2022.

Tentamen kommer att vara rättad inom tre arbetsveckor(15 arbetsdagar) från skrivningstillfället och kommer att finnas tillgänglig på studentexpeditionen minst sju veckor efter skrivningstillfället.

Del I

Uppgift 1

För händelserna A och B gäller att $P(A|B) = 0.6$, $P(A \cup B) = 0.9$ och $P(A \cap B^*) = 0.4$.
Bestäm $P(A)$.

A: 0.5

B: 0.6

C: 0.7

D: 0.8

Uppgift 2

Den stokastiska variabeln X har täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} Cx^{a-1}(1-x) & \text{om} \quad 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{annars,} \end{cases}$$

där a och C är positiva konstanter. Bestäm konstanten a om väntevärdet av X är $\frac{1}{6}$.

A: 0.200

B: 0.400

C: 0.600

D: 0.800

Uppgift 3

Den tvådimensionella stokastiska variabeln (X, Y) har sannolikhetsfunktionen:

$p_{X,Y}(x,y)$	$y=0$	$y=1$	$y=2$
$x=0$	0.1	0.2	0.3
$x=1$	0.3	0.1	0

Bestäm $C(X, Y)$.

A: -0.36

B: -0.26

C: 0.10

D: 0.54

Uppgift 4

En burk med pepparkakor innehåller 5 pepparkakstomtar och 4 pepparkaksgrisar. Om man tar två pepparkakor på måfå, hur stor är sannolikheten att man får två likadana pepparkakor?

A: 0.125

B: 0.222

C: 0.444

D: 0.722

Uppgift 5

En grossist säljer en viss färskvara till 50 närbutiker. I genomsnitt köper en butik 2.9 kartonger per vecka och standardavvikelsen är 1.8. Hur många kartonger ska grossisten köpa in per vecka om sannolikheten att inte kunna uppfylla alla 50 butikernas sammanlagda beställningar ska vara approximativt 5%.

A: 166

B: 170

C: 293

D: 322

Uppgift 6

Ett test för att upptäcka tjocktarmscancer har följande egenskaper. Sannolikheten för ett positivt svar givet att en person har tjocktarmscancer är 69% (sensitiviteten). Sannolikheten för ett negativt svar givet att en person inte har tjocktarmscancer är 92% (specificiteten). Andelen personer i åldergruppen 60-70 år som har tjocktarmscancer är 2% (prevalensen). Hur stor är sannolikheten att en person (i åldersgruppen 60-70 år) inte har tjocktarmscancer givet att testsvaret är negativt.

A: 56.0%

B: 92.0%

C: 98.5%

D: 99.3%

Uppgift 7

Antag att X_1 och X_2 är oberoende stokastiska variabler sådana att $X_1 \in Po(\mu)$ och $X_2 \in Po(2\mu)$. Två skattningar av μ har föreslagits: $\mu^*_{\text{obs}} = \frac{x_1+x_2}{3}$ och $\hat{\mu}_{\text{obs}} = \frac{x_1+\frac{x_2}{2}}{2}$. Vilket av nedanstående påståenden är sant?

A: μ^*_{obs} är den effektivaste skattningen av μ.

B: $\hat{\mu}_{\text{obs}}$ är den effektivaste skattningen av μ.

C: Bägge skattningarna är lika effektiva.

D: Man kan inte avgöra vilken av skattningarna som är effektivast, eftersom minst en av dem inte är väntevärdesriktig.

Uppgift 8

X_1, X_2 och X_3 är oberoende stokastiska variabler. $X_1 \in Exp(\lambda)$, $X_2 \in Exp(3\lambda)$, $X_3 \in Exp(4\lambda)$. Vi har fått utfallen $x_1 = 7.3$, $x_2 = 2.6$, $x_3 = 1.6$. Bestäm Maximum-Likelihood-skattningen av λ.

A: 0.14

B: 0.26

C: 0.37

D: 0.70

Uppgift 9

Låt $\bar{x} = 49.2$, $\bar{y} = 37.4$, $s_x^2 = 8.80$, $s_y^2 = 3.04$, $n_x = 6$ och $n_y = 12$ vara givet och antag att $X_i \in N(\mu_x, \sigma)$ och $Y_i \in N(\mu_y, \sigma)$ samt att alla dessa stokastiska variabler är oberoende. Ange undre gränsen för det 99%-iga tvåsidiga konfidensintervallet $I_{\mu_x - \mu_y}$.

A: 8.39

B: 8.59

C: 8.74

D: 8.96

Uppgift 10

Vi har sex oberoende observationer 64, 70, 78, 84, 100 och 102 från en $N(\mu, \sigma)$-fördelning där vi skattar σ^2 med stickprovsvariansen. Beräkna ett 95%-igt ensidigt uppåt begränsat konfidensintervall för variansen σ^2.

A: $(0, 735.4)$

B: $(0, 972.6)$

C: $(0, 1048.7)$

D: $(0, 1453.0)$

Uppgift 11

Vid tillverkning av en viss detalj kan två typer av fel uppstå, A och B. Dock kan endast det ena uppstå. Vi undersöker 150 detaljer och får 12 med fel A, 21 med fel B och 117 felfria. Det står angivet på specifikationen att $P(A) = 0.05$, $P(B) = 0.09$ och $P(felfri) = 0.86$. För att testa denna nollhypotes gjordes ett χ^2-test varvid man fick teststorheten $Q = 7.98$. Vilket av följande påståenden är sant?

A: H_0 kan varken förkastas på risknivån 2.5% eller risknivån 5%.

B: H_0 kan både förkastas på risknivån 5% och risknivån 2.5%.

C: H_0 kan förkastas på risknivån 2.5%, men inte på risknivån 5%.

D: H_0 kan förkastas på risknivån 5%, men inte på risknivån 2.5%.

Uppgift 12

Man har skäl att anta att mängden av en viss bakterie som lever i en speciell miljö ökar i en takt som beskrivs av följande modell: $y = y(x) = ke^{mx}$, där k och m är okända konstanter, y är bakteriemängden och x är tiden. För att skatta vilka värden det är på k och m och därmed kunna prediktera vad y kommer att anta för värden på olika värden för x så logaritmerar man och ansätter en linjär regressionsmodell enligt följande:

$$ln(y_i) = ln(k) + mx_i + \varepsilon_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i,$$

där ε_i betecknar slumpmässiga fel. Datamaterialet från de första fyra observationerna ger följande tabell:

x_i	5	9	13	15
$ln(y_i)$	17	29	36	45

Använd Minsta-Kvadrat-metoden för att skatta α och β (med fyra decimalers noggrannhet) i den linjära regressionsmodellen utifrån datamaterialet ovan och ange sedan det predikterade värdet på y när $x = 20$, dvs $y(20)$.

A: $10^{22} < y(20) \leq 10^{23}$

B: $10^{23} < y(20) \leq 10^{24}$

C: $10^{24} < y(20) \leq 10^{25}$

D: $10^{25} < y(20) \leq 10^{26}$

Del II

Uppgift 13

I den första urnan finns det 10 kulor varav 8 är vita. I den andra urnan finns det 20 kulor varav 4 är vita. Från varje urna dras en kula på måfå, och sedan dras en kula på måfå av de två dragna. Vad är sannolikheten att den sist dragna kulan är en vit kula? (10 p)

Uppgift 14

Antalet jordbävningar under en månad i en viss region beskrivs av en Poissonfördelad stokastisk variabel med väntevärde 1.2, oavsett månadens antal dagar. Antalet jordbävningar under olika månader beskrivs av oberoende stokastiska variabler. Låt X beskriva antalet jordbävningsfria månader under 5 år. Bestäm approximativt $P(X \leq 25)$. (10 p)

Uppgift 15

Vid ett experiment för att bestämma den adiabatiska konstanten γ för en gas vid rumstemperatur mättes de akustiska resonansfrekvenserna i ca 3 dm långa gasfyllda rör. Sambandet mellan grundfrekvensen f_0 och den adiabatiska konstanten har formen $f_0 = \frac{a}{l}\sqrt{\gamma}$ där l är rörets längd och a är en känd konstant. Antag att man har n oberoende slumpmässiga mätningar f_{0i} av grundfrekvensen, där mätning i gjorts i ett rör av känd längd l_i. Mätningarna f_{0i} är väntevärdesriktiga och med standardavvikelse σ.

a) Bestäm Minsta-Kvadrat-skattningen $\gamma^*_{MK,obs}$ av γ. (7 p)

b) Bestäm väntevärdet av γ^*_{MK}. (3 p)

Uppgift 16

För en viss mätapparatur misstänker man att mätfelen inte enbart är slumpmässiga utan även systematiska. För att undersöka detta mäter man 9 gånger en storhet vars värde man känner exakt. Låt $x_1, x_2, \ldots, x_9$ beteckna mätfelen vid dessa 9 mätningar. Erfarenhetsmässigt kan man anta att $x_1, x_2, \ldots, x_9$ är observationer från en normalfördelning $N(\Delta, \sigma)$, $\sigma = 0.4$. Nu misstänker man att $\Delta > 0$ och inte $\Delta = 0$. Därför skall man testa $H_0 : \Delta = 0$ mot $H_1 : \Delta > 0$ och väljer mellan två test. Det ena testet är det vanliga baserat på medelvärdet $\bar{x}$. Det andra testet är baserat på d, där d är antalet positiva x_i-värden. Signifikansnivån ska vara approx 0.09 i båda.

a) Bestäm testet, dvs beslutsregeln för att förkasta H_0, baserat på $\bar{x}$. (5 p)

b) Bestäm testet baserat på d. (5 p)

Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

LÖSNINGSFÖRSLAG TENTAMEN I SF1912/SF1914/SF1915/SF1916
SANNOLIKHETSTEORI OCH STATISTIK,
ONSDAG 21 DECEMBER 2022 KL 8.00–13.00.

Del I, Svar

1. C
2. B
3. B
4. C
5. A
6. D
7. A
8. A
9. B
10. C
11. B
12. C

Del I, Lösningsförslag

Uppgift 1

Man har sambanden:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap B^*) \\ P(A \cap B) &= P(A|B)P(B) \\ P(B) &= P(A \cup B) - P(A \cap B^*) \quad \text{(använd t.ex. Venndiagram)} \end{aligned}$$

som ger

$$P(A) = P(A|B)(P(A \cup B) - P(A \cap B^*)) + P(A \cap B^*) = 0.6(0.9 - 0.4) + 0.4 = 0.7$$

Uppgift 2

Man har att

$$1 = \int_0^1 f_X(x)dx = C \int_0^1 x^{a-1}(1-x)dx$$

och

$$E(X) = \int_0^1 x f_X(x)dx = C \int_0^1 x^a(1-x)dx$$

Låt

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_0^1 x^a(1-x)dx = \int_0^1 x^a - x^{a+1}dx \\ &= \left[\frac{x^{a+1}}{a+1} - \frac{x^{a+2}}{a+2}\right]_0^1 = \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2} = \frac{1}{(a+1)(a+2)} \end{aligned}$$

Man får då $E(X) = \frac{I(a)}{I(a-1)} = \frac{a}{a+2}$ och $\frac{a}{a+2} = \frac{1}{6} \Rightarrow 6a = a + 2 \Rightarrow a = \frac{2}{5} = 0.4$.

Uppgift 3

Kovariansen kan beräknas med uttrycket $C(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{j=0}^{1} j \cdot \sum_{k=0}^{2} p_{X,Y}(j,k) = 1 \cdot (0.1 + 0.3) = 0.4 \\ E(Y) &= \sum_{k=0}^{2} k \cdot \sum_{j=0}^{1} p_{X,Y}(j,k) = 1 \cdot (0.2 + 0.1) + 2 \cdot 0.3 = 0.9 \\ E(XY) &= \sum_{j=0}^{1} \sum_{k=0}^{2} j \cdot k \cdot p_{X,Y}(j,k) = 1 \cdot 1 \cdot 0.1 = 0.1 \end{aligned}$$

Alltså blir $C(X,Y) = 0.1 - 0.4 \cdot 0.9 = -0.26$.

Uppgift 4

För att få två likadana peppakakor kan man antingen ta två pepparkakstomtar, $\binom{5}{2}$ möjligheter, eller två pepparkaksgrisar, $\binom{4}{2}$ möjligheter. Sammanlagt blir det $\binom{5}{2}+\binom{4}{2} = \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}+\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1} = 16$ möjligheter. Antalet sätt att välja två pepparkakor vilka som helst är $\binom{9}{2} = \frac{9\cdot 8}{2\cdot 1} = 36$. Sannolikheten att ta två likadana pepparkakor är alltså $\frac{16}{36} = \frac{4}{9} \approx 0.444$.

Uppgift 5

Under antagandet att butikernas beställningar är oberoende och likafördelade, så kommer totala antalet beställda kartonger att vara approximativt normalfördelad enligt centrala gränsvärdessatsen, eftersom det handlar om ett större antal butiker. Låt X_k vara antalet kartonger som butik k vill köpa en viss vecka och $Y = \sum_{k=1}^{50} X_k$. Väntevärdet av totala antalet kartonger är $E(Y) = 50E(X_k) = 50 \cdot 2.9 = 145$ och standardavvikelsen är $D(Y) = \sqrt{50} \cdot 1.8 \approx 12.73$. Därmed är Y approximativt $N(145, 12.7)$ och $P(Y \leq a) = 0.95 \Leftrightarrow P(Y > a) = 0.05$, vilket medför att $a \approx E(Y) + D(Y) \cdot \lambda_{0.05} \approx 145 + 12.7 \cdot 1.645 \approx 166$.

Uppgift 6

Låt C vara händelsen att en person i åldersgruppen 60-70 år har tjocktarmscancer och T vara händelsen att testet är positivt. Då har man

$$P(T|C) = 0.69, \quad P(T^*|C^*) = 0.92, \quad P(C) = 0.02$$

Enligt Bayes sats fås

$$\begin{aligned} P(C^*|T^*) &= \frac{P(T^*|C^*)P(C^*)}{P(T^*)} = \frac{P(T^*|C^*)P(C^*)}{P(T^*|C)P(C) + P(T^*|C^*)P(C^*)} \\ &= \frac{P(T^*|C^*)(1-P(C))}{(1-P(T|C)P(C)) + P(T^*|C^*)(1-P(C))} \\ &= \frac{0.92 \cdot 0.98}{0.31 \cdot 0.02 + 0.92 \cdot 0.98} \approx 0.993 \end{aligned}$$

Uppgift 7

$E(\mu^*) = \frac{1}{3}(E(X_1) + E(X_2)) = \frac{1}{3}(\mu + 2\mu) = \mu$

$E(\hat{\mu}) = \frac{1}{2}(E(X_1) + \frac{1}{2}E(X_2)) = \frac{1}{2}(\mu + \frac{1}{2}(2\mu)) = \mu$

Altså är båda skattningarna väntevärdesriktiga.

Vi har nu:

$$V(\hat{\mu}) = \frac{1}{4}(V(X_1) + \frac{1}{4}V(X_2)) = \frac{1}{4}(\mu + \frac{1}{4}(2\mu)) = \frac{3\mu}{8},$$

$$V(\mu^*) = \frac{1}{9}(V(X_1) + V(X_2)) = \frac{1}{9}(\mu + 2\mu) = \frac{\mu}{3}$$

Skattningen μ^*_{obs} är effektivare än $\hat{\mu}_{obs}$ eftersom $V(\mu^*) = \frac{\mu}{3} < \frac{3\mu}{8} = V(\hat{\mu})$.

Uppgift 8

Notationen $X_1 \in \text{Exp}(\lambda)$,$X_2 \in \text{Exp}(3\lambda)$,$Z \in \text{Exp}(4\lambda)$ betyder att tätheten för X_1 är $f_{X_1}(x_1) = \lambda e^{-\lambda x_1}$,för X_2 är $f_{X_2}(x_2) = 3\lambda e^{-3\lambda x_2}$,för X_3 är $f_{X_3}(x_3) = 4\lambda e^{-4\lambda x_3}$. Därmed blir likelihoodfunktionen

$$L(\lambda) = \lambda e^{-\lambda x_1} \cdot 3\lambda e^{-3\lambda x_2} \cdot 4\lambda e^{-4\lambda x_3} = 12\lambda^3 e^{-\lambda(7.3+3\cdot 2.6+4\cdot 1.6)}$$

Då blir log-likelihoodfunktionen

$$\ln L(\lambda) = \ln 12 + 3\ln\lambda - 21.5\lambda.$$

Om vi maximerar $\ln L(\lambda)$ m a p λ har vi

$$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda} = \frac{3}{\lambda} - 21.5 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{21.5} = 0.14.$$

ML-skattningen $= 0.14$

Uppgift 9

Ett tvåsidigt konfidensintervall för skillnaden mellan två stickprovs väntevärden där vi antar att stickproven har samma okända varians fås m.h.a. §12.2 och § 11.2 till

$$I_{\mu_x-\mu_y} = \bar{x} - \bar{y} \pm s \cdot \sqrt{\frac{1}{n_x} + \frac{1}{n_y}} \cdot t_{\frac{\alpha}{2}}(n_x + n_y - 2)$$

där

$$s^2 = \frac{(n_x - 1)\cdot s_x^2 + (n_y - 1)\cdot s_y^2}{n_x + n_y - 2} = \frac{(6-1)\cdot 8.80 + (12-1)\cdot 3.04}{6+12-2} = 4.84$$

Intervallet $I_{\mu_x-\mu_y})$ kan nu skrivas

$$I_{\mu_x-\mu_y} = 49.2 - 37.4 \pm \sqrt{4.84} \cdot \sqrt{\frac{1}{6} + \frac{1}{12}} \cdot t_{0.005}(16) = 11.8 \pm \sqrt{\frac{4.84}{4}} \cdot 2.92 = 11.8 \pm 3.21$$

Viket ger att undre gränsen blir 8.59.

Uppgift 10

M.h.a §12.4 och §11.1b fås det tvåsidiga konfidensintervallet för σ^2 till

$$I_{\sigma^2} = \left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(f)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(f)} \right)$$

Då blir det ensidigt uppåt begränsade konfidensintervallet för σ^2

$$I_{\sigma^2} = \left(-\infty, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha}(f)} \right)$$

Eftersom $n = 6$ och $\alpha = 0.05$, blir $f = 5$ och $\chi^2_{0.95}(5) = 1.15$. Då

$$s^2 = \frac{1206}{5} = 241.2$$

blir den övre gränsen

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha}(f)} = \frac{5 \cdot 241.2}{1.15} = 1048.7$$

Uppgift 11

$\chi^2_{0.025}(3-1) = \chi^2_{0.025}(2)$. Nollhypotesen H_0 är att sannolikhetsfunktionen är $P(A) = 0.05$, $P(B) = 0.09$ och $P(felfri) = 0.86$. Vi går in i tab 4 i F.S och ser att $\chi^2_{0.025}(2) = 7.38$ och att $\chi^2_{0.05}(2) = 5.99$. $Q = 7.98$ är större än både 7.38 och 5.99, så på båda risknivåerna kan vi förkasta att sannolikhetsfunktionen är $P(A) = 0.05$, $P(B) = 0.09$ och $P(felfri) = 0.86$.

Uppgift 12

Här använder man §13.1a och §13.1b i formelsamlingen för att ta fram β^*_{obs} och α^*_{obs} där y i formelsamlingen är vårt lny.
$\bar{x} = 10.5, \bar{lny} = 31.75, \beta^*_{obs} = 2.6356, \alpha^*_{obs} = 4.0762.$

$$y(20) = e^{4.0762+2.6356\cdot 20} = 4.6 \cdot 10^{24}$$

Del II, Lösningsförslag

Uppgift 13

Utfallsrumet på de två dragna kulorna i första steget är $\Omega = \{VV, VB, BV, BB\}$, där V betecknar vit färg och B betecknar ej vit färg, samt den första bokstaven motsvarar kula från den första urnan och den andra bokstaven – kulan från den andra urnan. Låt nu händelse A vara att den sist dragna kulan, dvs kulan som är dragen i det andra steget, är en vit kula. Vi har enligt Lagen om total sannolikhet:

$$P(A) = P(A|VV)P(VV) + P(A|VB)P(VB) + P(A|BV)P(BV) + P(A|BB)P(BB) =$$

$$= 1\Big(\frac{8}{10} \cdot \frac{4}{20}\Big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{8}{10} \cdot \frac{16}{20}\Big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{2}{10} \cdot \frac{4}{20}\Big) + 0 = \Big(\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5}\Big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5}\Big) + \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}\Big) =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5}\Big(4 + \frac{4 \cdot 4}{2} + \frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{25}\Big(12 + \frac{1}{2}\Big) = \frac{1}{25} \cdot \frac{25}{2} = \frac{1}{2}.$$

Dvs sannolikheten är 0.5 att den sist dragna kulan är en vit kula.

Uppgift 14

Sannolikheten att en månad är jordbävningsfri fås ur Poisson(1.2)-fördelningen till

$$p = \frac{(1.2)^0}{0!}\mathrm{e}^{-1.2} = \mathrm{e}^{-1.2} = 0.30119.$$

Av $n = 60$ månader är antalet jordbävningsfria, Z, binomialfördelat med parametrar n och p. Eftersom $np(1-p) = 12.63 > 10$ så kan binomialfördelningen approximeras med normalfördelningen, dvs Z är approximativt $\mathrm{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$. Då är

$$P\left(Z \leq 25\right) = \text{ halvkorrektion } = P\left(Z \leq 25.5\right) = P\left(\frac{Z - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq \frac{25.5 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \approx \Phi\left(2.0903\right) \approx$$

$$\approx \Phi\left(2.09\right) = \underline{0.9817}.$$

Uppgift 15

Låt $x_k, k = 1, 2, ...n$ vara de uppmätta grundfrekvenserna.

a) Väntevärdet $E(X_k) = \frac{a}{l_k}\sqrt{\gamma}$. Man ska minimera

$$Q(\gamma; \mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{n}(x_k - E(X_k))^2 = \sum_{k=0}^{n}(x_k - \frac{a}{l_k}\sqrt{\gamma}))^2$$

Minimum fås där derivatan är noll ($\gamma = 0$ ger inte minimum då $x_k > 0$).

$$Q'(\gamma; \mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{n} 2(x_k - \frac{a}{l_k}\sqrt{\gamma})(-\frac{a}{l_k})\frac{1}{2\sqrt{\gamma}} = 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{n}\frac{x_k}{l_k} - \sum_{k=0}^{n}\frac{a}{l_k^2}\sqrt{\gamma} = 0$$

vilket ger

$$\gamma^*_{\text{obs}} = \left(\frac{\sum_{k=0}^{n}\frac{x_k}{l_k}}{\sum_{k=0}^{n}\frac{a}{l_k^2}}\right)^2$$

b) Skattningen är en kvadrat: $\gamma^* = Y^2$ där Y är MK-skattningen av $\sqrt{\gamma}$: $Y = \frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{l_k}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{a}{l_k^2}}$.
Man kan då utnyttja att $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 \Leftrightarrow E(Y^2) = V(Y) + E(Y)^2$.
Väntevärdet av Y är lika med $\sqrt{\gamma}$ eftersom $E(X_k)$ är linjär i $\sqrt{\gamma}$. Variansen av Y blir

$$V(Y) = V\left(\frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{l_k}}{\sum_{k=0}^{n} \frac{a}{l_k^2}}\right) = \frac{1}{(\sum_{k=0}^{n} \frac{a}{l_k^2})^2} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{l_k^2} V(x_k) = \frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{l_k^2}}{(\sum_{k=0}^{n} \frac{a}{l_k^2})^2} \sigma^2$$

Alltså blir

$$E(\gamma^*) = \gamma + \frac{\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{l_k^2}}{(\sum_{k=0}^{n} \frac{a}{l_k^2})^2} \sigma^2$$

Uppgift 16

16a) Från Tabell 1, $\lambda_{0.09} \approx 1.34$. Därför förkastar vi $H_0 : \Delta = 0$ (mot $H_1 : \Delta > 0$) på sign nivån approx 0.09 om

$$\frac{\bar{x} - 0}{0.4/\sqrt{9}} \geq 1.34,$$

eller, efter en enkel omställning, om

$$\bar{x} \geq 0.1787,$$

vilket är det testet som efterfrågas, dvs baserat på $\bar{x}$.

16b) Låt d vara observation på s.v. D.
Då vet vi att $D \in Bin(9, 0.5)$ om $H_0 : \Delta = 0$ är sann. Vidare, enligt Tabell 6,

$$P(D \leq 6 | D \in Bin(9, 0.5)) \approx 0.91,$$

eller,

$$P(D \geq 7 | H_0 \text{ är sann}) \approx 0.09.$$

Det sökta testet, eller beslutsregeln, är därför: förkasta H_0 om $d \geq 7$. Signifikansnivån av det testet är ca 0.09.