Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

TENTAMEN I SF1920/SF1921 SANNOLIKHETSLÄRA OCH STATISTIK,
ONSDAG 7 JUNI 2023 KL 08.00–13.00

Examinator: Björn-Olof Skytt, tel 08-790 8649.

Tillåtna hjälpmedel: Formel- och tabellsamling i Matematisk statistik (utdelas vid tentamen), miniräknare.

Tentamen består av två delar, benämnda del I och del II. Del I består av uppgifterna 1-12. På denna del skall endast svar anges, antingen i form av ett numeriskt värde med tre värdesiffrors noggrannhet eller i form av val av ett av de möjliga svarsalternativen. Svaren anges på svarsblanketten.
Studenter som är godkända på kontrollskrivningen behöver ej besvara uppgift 1-3, utan får tillgodoräkna sig dessa tre uppgifter (i svarsblanketten anges ordet Bonus). Studenter som är godkända på den andra datorlaborationen behöver ej besvara uppgift 12, utan får tillgodoräkna sig denna uppgift (i svarsblanketten anges ordet Bonus). Detta gäller endast på ordinarie tentan i mars 2023 och vid omtentamen i juni 2023. Gränsen för godkänt är 9 poäng. Möjlighet att komplettera ges för tentander med 8 poäng.
Del II består av uppgifterna 13-16 och varje korrekt lösning ger 10 poäng. Del II rättas bara för studenter som är godkända på eller får komplettera del I och poäng på del II krävs för högre betyg än E. På denna del skall resonemang och uträkningar skall vara så utförliga och väl motiverade att de är lätta att följa. Införda beteckningar skall förklaras och definieras och numeriska svar skall anges med minst två värdesiffrors noggrannhet. Studenter som är godkända på den andra datorlaborationen får 3 bonuspoäng på del II på ordinarie tentamenstillfället och vid omtentamen i juni 2023.

Tentamen kommer att vara rättad inom tre arbetsveckor från skrivningstillfället och kommer att finnas tillgänglig på studentexpeditionen minst sju veckor efter skrivningstillfället.

Del I

Uppgift 1

För händelserna A och B vet vi att $P(A) = 0.40$, $P(B) = 0.8$ och $P(A|B) = 0.25$.
Beräkna sannolikheten att exakt en av händelserna A och B inträffar.

A: 0.2

B: 0.4

C: 0.6

D: 0.8

Uppgift 2

Per har 80% chans att klara sin tenta om han är frisk , men bara 55 % chans om han är förkyld. Det visar sig att han klarar tentan. Vad är sannolikheten att han var förkyld under tentan? Per är förkyld i genomsnitt tre av årets 52 veckor.

A: 2.35%

B: 3.96%

C: 4.04%

D: 6.96%

Uppgift 3

En stokastisk variabel X har fördelningsfunktionen

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x < 0, \\ \frac{x^2}{4} & \text{om } 0 \leq x \leq 2, \\ 1 & \text{om } x > 2. \end{cases}$$

Beräkna standardavvikelsen $D(2X)$.

A: 0.667

B: 0.943

C: 2

D: 2.83

Uppgift 4

Från en grupp på 10 banktjänstemän väljs 3 slumpmässigt ut för att omplaceras för att övervaka nya filialkontor. Om 2 av de 10 banktjänstemännen är kvinnor och 8 är män, vad är sannolikheten att minst en av banktjänstemännen som ska omplaceras är en kvinna.

A: 0.384

B: 0.467

C: 0.480

D: 0.533

Uppgift 5

De diskreta stokastiska variablerna X och Y har den simultana sannolikhetsfunktionen

$p_{X,Y}(j,k)$	0	1	2
0	0.1	0.3	0
1	0	0.4	0.2

Således antar X alltså värdena 0 eller 1, medan Y antar värdena 0, 1, eller 2.
Beräkna kovariansen $C(2X, -2Y)$.

A: -0.56

B: -0.28

C: 0.28

D: 0.56

Uppgift 6

Antalet intrångsförsök till en viss dator är Poissonfördelat med intensiteten 2.8 försök per minut. Bestäm approximativt sannolikheten att mer än 180 intrångsförsök görs under en timme.(Man kan anta att antalet intrångsförsök under icke överlappande tidsintervall är oberoende.)

A: ungefär 17%

B: ungefär 28%

C: ungefär 36%

D: ungefär 47%

Uppgift 7

Låt X och Y vara två oberoende s.v. sådana att $X \in Bin(n_X, p)$ och $Y \in Bin(n_Y, 2p)$.

$$p^*_{obs} = \frac{2x + y}{n_X + n_Y}$$

och

$$\hat{p}_{obs} = \left(\frac{2x}{n_X} + \frac{y}{n_Y}\right)\frac{1}{2}$$

är två skattningar av p.

A: Ingen av skattningarna är väntevärdesriktig

B: Båda skattningarna är väntevärdesriktiga

C: Endast p^*_{obs} är väntevärdesriktig

D: Endast $\hat{p}_{obs}$ är väntevärdesriktig

Uppgift 8

X_1 och X_2 är oberoende stokastiska variabler. $X_1 \in Po(\mu)$ och $X_2 \in Po(2\mu)$. Vi har fått utfallen $x_1 = 4$ och $x_2 = 13$. Bestäm minsta-kvadratskattningen av μ.

A: 4.0

B: 5.7

C: 6.0

D: 8.5

Uppgift 9

Antag att vi vill skatta väntevärdet μ för en normalfördelning med känd standardavvikelse $\sigma = 3$ och därför tar ett slumpmässigt stickprov $x_1, x_2, \ldots, x_n$ av storlek $n = 9$ ur denna fördelning. Stickprovsmedelvärdet blir $\bar{x} = 10$. Beräkna ett tvåsidigt 95% konfidensintervall för väntevärdet μ. Svara med den övre gränsen.

A: 11.83

B: 11.96

C: 12.31

D: 13.00

Uppgift 10

Man ville uppskatta hur många förpackningar som skadats i en transport med 5000 förpackningar. Man valde ut 300 förpackningar på måfå, och fann att av dessa var 16 skadade. Bestäm nedre gränsen för det tvåsidiga konfidensintervallet för det totala antalet skadade förpackningar i transporten. Konfidensintervallet ska ha den approximativa konfidensgraden 95%.

A: ungefär 140

B: ungefär 160

C: ungefär 184

D: ungefär 206

Uppgift 11

Låt $X \in Bin(16, p)$ och vi testar $H_0 : p = 1/4$. Vi förkastar H_0 om $x \geq 8$. Bestäm styrkan hos testet för alternativet $H_1 : p = 1/2$.

A: 0.03

B: 0.40

C: 0.60

D: 0.97

Uppgift 12

Följande datamaterial beskriver hur försäljningen av en vara beror av hur mycket som spenderats på reklam.

Reklam (kkr)	22	29	31	35	45
Försäljning (kkr)	103	108	106	110	130

Det är rimligt att tro att det föreligger ett linjärt samband mellan variablerna. Utifrån datamaterialet ovan skattas en linjär regressionsmodell

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i,\ i = 1, \ldots, 5,$$

där y_i = försäljning (kkr) beror av x_i = reklamkostnad (kkr) och ε_i betecknar slumpmässiga fel. Minsta-kvadrat-skattningarna av regressionskoefficienterna α och β blev $\alpha^*_{obs} = 73.36$ respektive $\beta^*_{obs} = 1.174$.
Man kontrollerar vidare om den effekt som reklamkostnaden har på försäljningen är signifikant, dvs man testar $H_0 : \beta = 0$ mot $H_1 : \beta \neq 0$. P-värdet för testet blev 0.023.
Vilken slutsats kan man dra då man fått det P-värdet?

A: Vi kan förkasta H_0 på risknivån 5 % så effekten är signifikant på risknivån 5 %, men vi kan inte förkasta H_0 på risknivån 1 % så effekten är inte signifikant på risknivån 1 %.

B: Vi kan förkasta H_0 på risknivån 1 % så effekten är signifikant på risknivån 1 %, men vi kan inte förkasta H_0 på risknivån 5 % så effekten är inte signifikant på risknivån 5 %.

C: Vi kan inte förkasta H_0 på risknivån 5 % så effekten är signifikant på risknivån 5 %, men vi kan förkasta H_0 på risknivån 1 % så effekten är inte signifikant på risknivån 1 %.

D: Vi kan inte förkasta H_0 på risknivån 1 % så effekten är signifikant på risknivån 1 %, men vi kan förkasta H_0 på risknivån 5 % så effekten är inte signifikant på risknivån 5 %.

Del II

Uppgift 13

I en mindre spelhåla erbjuds man att mot avgiften 12 kr kasta två vanliga symmetriska tärningar och som utbetald vinst erhålla produkten av det antal prickar som respektive tärning visar.

a) En person A tänker sig att möjligen spela en omgång men gör det endast om sannolikheten att vinna minst 12 kr är större än 50 %. Beräkna sannnolikheten och ange om A skall spela. (5 p)

b) En person B avser att möjligen spela ett stort antal omgångar och väljer att spela endast om han går med vinst i det långa loppet, dvs. om väntevärdet av vinsten i ett spel är minst 12 kr. Beräkna väntevärdet och ange om B skall spela. (5 p)

Uppgift 14

$X_1, X_2, ...X_{30}$ är oberoende stokastiska variabler som alla är likformigt fördelade på intervallet (0,1), dvs. de tillhör alla $U(0,1)$.

Beräkna $P(X_1^2+X_2^2+..., X_{30}^2 \leq 12)$. Rimliga och välmotiverade approximationer är tillåtna. (10 p)

Uppgift 15

En statistiker sysslar med analys av ett visst kösystem. På teoretisk väg beräknar hon sannolikheten för att en kund som anländer finner betjäningsstationen fri respektive har 1, 2, eller 3 kunder framför sig i kön. Resultatet blev

Antal kunder i kön	Sannolikhet i kön i procent om modellen stämmer	Inträffade ggr
0	12	30
1	18	42
2	22	34
3	16	28

Beräkningarna var emellertid mycket komplicerade, varför hon ville kontrollera att hon inte räknat fel genom att göra ett simuleringsexperiment. Hon utförde detta experiment 200 ggr varvid de aktuella fallen inträffade så många gånger som framgår av tabellen. Pröva på lämpligt sätt om resultatet kan anses bekräfta hennes kalkyler eller ej. (10 p)

Uppgift 16

Ett radioaktivt preparat avger impulser(t.ex α-partklar) som är $Po(\lambda \cdot t)$-fördelade. Dessa impulser registreras av en Geigerräknare som dock dessutom registrerar bakgrundsstrålningen(t.ex från kosmisk strålning och radioaktiva kärnor i väggar etc.). Dessa registreringar tillhör en $Po(\mu \cdot t)$-fördelning som naturligtvis är oberoende av preparatets strålning. För att ta reda på preparatets strålning så gör man på följande sätt. Först mäts bakgrundsstrålningen under tiden t_1, varvid man erhåller x_1 st registreringar. Sedan mäts bakgrundsstrålning + preparatets strålning under tiden t_2, varvid man erhåller x_2 st registreringar.

a) Ta fram Maximum-Likelihood-skattningen av λ uttryckt i x_1, x_2, t_1 och t_2. (5 p)

b) Visa att denna skattning är väntevärdesriktig samt beräkna ett approximativt 95%-igt konfidensintervall för λ om $t_1 = 1000$ sek, $t_2 = 100$ sek, $x_1 = 500$ och $x_2 = 75$. (5 p)

Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

LÖSNINGSFÖRSLAG
TENTAMEN I SF1920/SF1921 SANNOLIKHETSLÄRA OCH STATISTIK,
ONSDAG 7 JUNI 2023 KL 8.00–13.00.

Del I, Svar

1. D

2. C

3. B

4. D

5. A

6. A

7. A

8. C

9. B

10. A

11. C

12. A

Del I, Lösningsförslag

Uppgift 1

Vi söker $P(A \cap B^*) + P(B \cap A^*) = P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) =$
$[\text{ där} P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = 0.25 \cdot 0.8 = 0.2\ ] = 0.4 - 0.2 + 0.8 - 0.2 = 0.8$

Uppgift 2

Låt händelserna vara K-Per klarar tentan, och F-Per är förkyld. Vi söker

$$P(F|K) = \frac{P(F \cap K)}{P(K)} = \frac{P(K|F)P(F)}{P(K|F)P(F) + P(K|F^*)P(F^*)} = \frac{0.55 \cdot \frac{3}{52}}{0.55 \cdot \frac{3}{52} + 0.8 \cdot \frac{49}{52}} = 0.404$$

Uppgift 3

Eftersom $f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x)$ så har vi

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{om } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Vi börjar med att ta fram variansen $V(X) = E(X^2) - E^2(X)$
$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^2 x \cdot \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$
$E(X^2) = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{x}{2} dx = \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^2 = 2$
$\Rightarrow V(X) = 2 - (\frac{4}{3})^2 = \frac{2}{9}$
$V(2X) = 4V(X) = \frac{8}{9} \Rightarrow D(2X) = \sqrt{\frac{8}{9}} = 0.943$

Uppgift 4

Låt X vara antalet kvinnor som ska omplaceras. Vi söker $P(X = 1) + P(X = 2)$. Här har vi hypergeometrisk fördelning eftersom det rör sig om dragning utan återläggning utan hänsyn till ordning.

$$P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{\binom{2}{1}\binom{8}{2}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{2}{2}\binom{8}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{7}{15} + \frac{1}{15} = 0.533$$

Uppgift 5

$C(2X, -2Y) = 2 \cdot (-2)C(X, Y) = -4C(X, Y)$
$C(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$

$$E(XY) = \sum_{\text{alla } x,y} xyp_{X,Y}(x, y) = 1 \cdot 1 \cdot 0.4 + 1 \cdot 2 \cdot 0.2 = 0.8$$

$$E(X) = \sum_{\text{alla } x} xp_X(x) = 1 \cdot (0.4 + 0.2) = 0.6$$

$$E(Y) = \sum_{\text{alla } y} yp_Y(y) = 1 \cdot (0.3 + 0.4) + 2 \cdot (0 + 0.2) = 1.1$$

$C(X, Y) = 0.8 - 0.6 \cdot 1.1 = 0.14 \Rightarrow C(2X, -2Y) = -0.56$

Uppgift 6

Eftersom summan av oberoende Poissonfördelade stokastiska variabler är Poissonfördelad får vi att antalet intrångsförsök till en viss dator är Poissonfördelat med intensiteten $2.8 \cdot 60 = 168$ försök per timme. Anta nu att $X \in Po(168)$. Eftersom $168 \geq 10$ gäller enligt §6 i formelsamlingen att vi kan göra Normalapproximationen $X \in N(168, \sqrt{168})$. Vi söker nu $P(X > 180) = P(X \geq 181)$ eftersom vi har diskret fördelning. Eftersom vi approximerar till en kontinuerlig fördelning är det lämpligt att göra halvkorrektion och söka $P(X \geq 180.5)$

$$P(X \geq 180.5) = \text{Vi gör om till } N(0,1) = 1 - P\left(\frac{X - 168}{\sqrt{168}} \leq \frac{180.5 - 168}{\sqrt{168}}\right) \approx 1 - \Phi(0.96) \approx 0.17$$

(Om vi inte gör halvkorrektion och räknar ut $P(X > 180)$ eller $P(X \geq 181)$ så får vi ungefär 18 procent eller ungefär 16 procent.)

Uppgift 7

$$E(p^*) = E\left(\frac{2x + y}{n_X + n_Y}\right) = \frac{2E(X) + E(Y)}{n_X + n_Y} = \frac{2n_X \cdot p + n_Y \cdot 2p}{n_X + n_Y} = 2p \neq p \text{ Alltså är skattningen ej vvr.}$$

$$E(\hat{p}) = E\left(\frac{2X}{n_X} + \frac{Y}{n_Y}\right)\frac{1}{2} = \left(\frac{2E(X)}{n_X} + \frac{E(Y)}{n_Y}\right)\frac{1}{2} = \left(\frac{2n_X \cdot p}{n_X} + \frac{n_Y \cdot 2p}{n_Y}\right)\frac{1}{2} = 2p \neq p \text{ Alltså är skattningen ej vvr.}$$

Uppgift 8

se § 9.2 i F.S.

$$Q = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu_i(\theta_1, \theta_2, ..))^2 = \sum_{i=1}^{2}(x_i - E(X_i))^2 = (4-\mu)^2 + 13 - 2\mu)^2$$

$$\frac{dQ}{d\mu} = -2(4-\mu) - 2(13-2\mu)2 = 0 \Rightarrow 8 - 2\mu + 52 - 8\mu = 0 \Rightarrow 60 - 10\mu = 0 \Rightarrow \mu = 6$$

Alltså är Minsta -Kvadrat-skattningen av μ lika med 6. D.v.s. $\mu^*_{obs_{MK}} = 6$

Uppgift 9

Eftersom σ är känd fås det tvåsidiga konfidensintervallet för μ till

$$I_\mu = \bar{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \lambda_{\frac{\alpha}{2}} = 10.0 \pm \frac{3}{\sqrt{9}} \cdot \lambda_{0.025} = 10.0 \pm \frac{3}{\sqrt{9}} \cdot 1.96$$

Alltså är övre gränsen 11.96.

Uppgift 10

Om vi antar att X är antalet skadade förpackningar i urvalet så gäller att $X \in Bin(300, p)$ eftersom vi antar att sannolikheten är densamma för varje förpackning att vara skadad. Vi har fått utfallet $x = 16$. Vi skattar andelen p med $p^*_{obs} = \frac{x}{n} = \frac{16}{300}$ Eftersom $np^*_{obs}(1-p^*_{obs}) = 300(1 - \frac{16}{300}) \geq 10$ så kan vi anse att X och därmed p^* är en approximativt Normalfördelad stokastisk variabel och därmed kan vi bilda ett konfidensintervall för andelen p med approximativ konfidensgrad enligt § 12.3.

$$\begin{aligned} V\left(\frac{X}{n}\right) &= \frac{1}{n^2}V(X) = \frac{1}{n^2}np(1-p) = \frac{p(1-p)}{n} \\ D\left(\frac{X}{n}\right) &= \sqrt{V\left(\frac{X}{n}\right)} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \end{aligned}$$

Vi får då det tvåsidiga konfidensintervallet till

$$I_p = p^*_{obs} \pm \sqrt{\frac{p^*_{obs} \cdot (1-p^*_{obs})}{n}} \cdot \lambda_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{16}{300} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{16}{300} \cdot (1 - \frac{16}{300})}{300}\right)} \cdot \lambda_{0.025} =$$

$$= \frac{16}{300} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{16}{300} \cdot \frac{284}{300})}{300}\right)} \cdot 1.96$$

Detta ger nedre gränsen för andelen skadade förpackningar till ca $0.0533 - 0.0254 = 0.0279$ Denna nedre gräns för andelen multipliceras sedan med 5000. Detta ger nedre gränsen för totala antalet skadade förpackningar i transporten till ca 140.

Uppgift 11

Styrkan hos testet är $P(\text{förkasta}H_0)$ om H_1 är sann.
Dvs. vi ska ta fram $P(X \geq 8)$ om $X \in Bin(16, 0.5)$
$P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) =$ [se tab 6] $= 1 - 0.40 = 0.60$.

Uppgift 12

P-värdet är sannolikheten att förkasta H_0 under förutsättningen att H_0 är sann utgående från det värde man fått på testvariabeln.
Eftersom P-värdet för testet blev 0.023 som ju är mindre än risknivån 5%, så kan vi förkasta H_0 att $\beta = 0$ på risknivån 5 % så effekten är signifikant på risknivån 5 %, men vi kan inte förkasta H_0 att $\beta = 0$ på risknivån 1 % eftersom 0.023 som ju är större än risknivån 1%,så effekten är inte signifikant på risknivån 1 %. Alltså är alternativet A det rätta.

Del II, Lösningsförslag

Uppgift 13

a)

$$\text{Sökt sannolikhet } = \frac{\text{antal gynnsamma utfall}}{\text{antal möjliga utfall}} = \frac{17}{36} < 50\%. \Rightarrow \text{Spela inte!}$$

b) X_i = antal ögon hos tärning i;$i = 1, 2$. Sökt är $E(X_1X_2)$ = [oberoende] $= E(X_1)E(X_2) = 3.5^2 = 12.25 > 12 \Rightarrow$ Spela!

Uppgift 14

Sätt $Z_k = X_k^2$
$E(Z_k) = E(X_k^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$
$E(Z_k^2) = E(X_k^4) = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 f_X(x)dx = \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}$
$V(Z_k) = \frac{1}{5} - (\frac{1}{3})^2 = \frac{4}{45}$

Z_k:na är oberoende, likafördelade och många så vi kan använda Centrala GränsvärdesSatsen. Dvs. $W = Z_1 + Z_2 + ... + Z_{30}$ är approximativt Normalfördelad.

$$W \approx N(30E(Z_k), D(Z_k) \cdot \sqrt{30}) = N(30 \cdot \frac{1}{3}, \cdot\sqrt{\frac{4}{45}}\sqrt{30}) = N(10, \sqrt{\frac{8}{3}})$$

$$\text{Sökt sannolikhet } = P(W \leq 12) = \Phi\left(\frac{12-10}{\sqrt{\frac{8}{3}}}\right) \approx \Phi(1.22) \approx 0.89$$

Uppgift 15

Vi har $n = 200$ observationer på multinomialfördelningen med fem celler. Vi har ju också resultatet att antalet kunder i kön ≥ 4
Vilket ger tabellen

Antal kunder i kön	Sannolikhet i kön i procent om modellen stämmer	Inträffade ggr
0	12	30
1	18	42
2	22	34
3	16	28
fler än 3	32	66

Hypoteser:

$$H_0 : P(A_1) = 0.12, \quad P(A_2) = 0.18, \quad P(A_3) = 0.22, \quad P(A_4) = 0.16, \quad P(A_5) = 0.32.$$

$H_1 : H_0$ ej sann.

Signifikansnivå: $\alpha = 0.05$.

Testvariabel: Testvariabeln

$$Q_{\text{obs}} = \sum_{j=1}^{r} \frac{(x_j - np_j)^2}{np_j}$$

är approximativt χ^2-fördelad med $(r-1)$ frihetsgrader. Eftersom $r = 5$ har vi $(r-1) = 4$ frihetsgrader. I formelsamlingen hittar vi $\chi^2_{0.05}(4) = 9.49$.

Beslutsregel: H_0 förkastas om $Q > 9.49$.

Resultat: χ^2-metoden kan användas, ty för $np_1 = 200 \times 0.12 = 24 > 5$ och alla övriga np_j är större.

Testvariabeln blir

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{j=1}^{r} \frac{(x_j - np_j)^2}{np_j} \\ &= \frac{(30-24)^2}{24} + \frac{(42-36)^2}{36} + \\ &+ \frac{(34-44)^2}{44} + \frac{(28-32)^2}{32} + \frac{(66-64)^2}{64} = \end{aligned}$$

$= 1.5 + 1 + 2.273 + 0.5 + 0.0625 = 5.3$

$5.3 < 9.49$

Slutsats: H_0 förkastas ej på signifikansnivån 5%. Hennes experiment har inte lyckats motbevisa teorin.

Uppgift 16

a) $X_1 \in Po(\mu \cdot t_1)$, $X_2 \in Po((\lambda+\mu)\cdot t_2)$, X_1 och X_2 är ober $\Rightarrow$

$$\Rightarrow L(\lambda,\mu) = \frac{(\mu \cdot t_1)^{x_1}}{x_1!} \cdot e^{-\mu \cdot t_1} \cdot \frac{((\lambda+\mu)\cdot t_2)^{x_2}}{x_2!} \cdot e^{-(\lambda+\mu)\cdot t_2}$$

$$lnL(\lambda,\mu) = x_1 ln(\mu \cdot t_1) + x_2 ln(\lambda+\mu)\cdot t_2) - \mu \cdot t_1 - (\lambda+\mu)\cdot t_2 - lnx_1! - lnx_2!$$

$$\frac{\partial lnL(\mu,\lambda)}{\partial \mu} = x_1 \cdot \frac{t_1}{\mu \cdot t_1} + x_2 \cdot \frac{t_2}{(\mu+\lambda)\cdot t_2} - t_1 - t_2 = 0$$

$$\text{Alltså} \qquad \frac{\partial lnL(\mu,\lambda)}{\partial \mu} = \frac{x_1}{\mu} + \frac{x_2}{(\mu+\lambda)} - t_1 - t_2 = 0 \text{ (ekv 1)}$$

$$\frac{\partial lnL(\mu,\lambda)}{\partial \lambda} = x_2 \cdot \frac{t_2}{(\mu+\lambda)\cdot t_2} - t_2 = 0$$

$$\text{Alltså} \qquad \frac{\partial lnL(\mu,\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{x_2}{(\mu+\lambda)} - t_2 = 0 \text{ (ekv 2)}$$

$$\text{ekv 2 i ekv 1} \Rightarrow \frac{x_1}{\mu} + t_2 - t_1 - t_2 = 0 \Rightarrow \mu^*_{\text{obs}} = \frac{x_1}{t_1}$$

$$\mu = \frac{x_1}{t_1} \text{ sätts in i ekv 2 } \Rightarrow \frac{x_2}{\frac{x_1}{t_1} + \lambda} - t_2 = 0 \Rightarrow ... \Rightarrow \lambda^*_{\text{obs}} = \frac{x_2}{t_2} - \frac{x_1}{t_1}$$

b)

$$E(\lambda^*) = \frac{E(X_2)}{t_2} - \frac{E(X_1)}{t_1} = \frac{(\lambda+\mu)\cdot t_2}{t_2} - \frac{\mu \cdot t_1}{t_1} = \lambda. \text{ Alltså är skattningen vvr.}$$

$$X_2 \approx N((\lambda+\mu)\cdot t_2, \sqrt{(\lambda+\mu)\cdot t_2}) \text{ ty } (\lambda+\mu)\cdot t_2 \approx (\lambda^*_{\text{obs}} + \mu^*_{\text{obs}})\cdot t_2 = \text{(från a)} =$$
$$= (\frac{x_2}{t_2} - \frac{x_1}{t_1} + \frac{x_1}{t_1})t_2 = 75 \geq 15 \text{(se §5 i F.S.)}$$

$$X_1 \approx N(\mu \cdot t_1, \sqrt{\mu \cdot t_1}) \text{ ty } \mu \cdot t_1 \approx \mu^*_{\text{obs}} \cdot t_1 = \text{(från a)} = x_1 = 500 \geq 15 \text{ (se §5 i F.S.)}$$

$$\Rightarrow \lambda^* = \frac{X_2}{t_2} - \frac{X_1}{t_1} \approx N(\lambda,\sigma) \text{ där } \sigma^2 = (\frac{1}{t_2^2})(\sqrt{(\lambda+\mu)\cdot t_2})^2 + (\frac{1}{t_1^2})(\sqrt{\mu \cdot t_1})^2 =$$

$$\approx (\frac{1}{100^2})\cdot 75 + (\frac{1}{1000^2})\cdot 500 \text{ Alltså gäller att } \lambda^* \approx N(\lambda, 0.089)$$

F.S. §12.3 $\Rightarrow I_\lambda = \lambda^*_{\text{obs}} \pm 0.089 \cdot 1.96$

Svar: $I_\lambda = 0.250 \pm 0.175$