Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

KONTROLLSKRIVNING I SF1920/SF1921
SANNOLIKHETSTEORI OCH STATISTIK,
FREDAG 9 FEBRUARI 2024 KL 08.00–10.00.
Tillåtna hjälpmedel: miniräknare
Svara med minst tre värdesiffrors noggrannhet på den bifogade svarsblanketten!
För godkänt krävs att minst 3 av 5 uppgifter är korrekt besvarade.

Uppgift 1

En viss typ av skrivning har fyra uppgifter, där varje uppgift har fyra svarsalternativ och för den skrivande framstår det som att varje svarsalternativ har samma sannolikhet att vara rätt. För att bli godkänd måste man ha rätt på minst tre av de fyra uppgifterna. Hur stor är sannolikheten att bli godkänd om man bara chansar på varje uppgift?

Uppgift 2

För händelserna A och B gäller att $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.3$,och $P(A \cap B) = 0.1$.

Beräkna $P(A^* \cap B^* | A \cup B^*)$.
(A^* och B^* är komplementen till A respektive B.)

Var god vänd!

Uppgift 3

De oberoende stokastiska variablerna X och Y är båda exponentialfördelade med väntevärde 2, dvs. de har täthetsfunktionerna

$$f_X(x) = f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot e^{-x/2}, x \geq 0 \\ 0, \text{annars} \end{cases}$$

Låt Z = max(X,Y) = det största av X och Y. Beräkna $P(Z > 2)$.

Uppgift 4

Strömstyrkan mellan A och B är en stokastisk variabel X som är likformigt fördelad i intervallet (15,18), dvs. vi har täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{18-15} & \text{om } 15 \leq x \leq 18 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Beräkna variansen för effekten $Y = 5X^2$.

Uppgift 5

De diskreta stokastiska variablerna X och Y har den simultana sannolikhetsfunktionen

$p_{X,Y}(x,y)$	$x=1$	$x=2$
$y=2$	0.4	0
$y=4$	0.5	0.1

Således antar X värdena 1 och 2, medan Y antar värdena 2 och 4.

Beräkna $E(X \cdot Y)$.

Lycka till!

Lösningsförslag

Uppgift 1

Antal möjliga utfall är 4^4.

Antal gynnsamma utfall som ger rätt på fyra uppgifter är 1.

Ett sätt att få exakt tre rätt är att få fel på första uppgiften och rätt på de tre andra uppgifterna. Antal sätt att få fel på första uppgiften är 3 eftersom det finns tre felaktiga svarsalternativ. Men vi kan även få fel på någon annan uppgift och rätt på de tre andra. Multiplikationsprincipen ger då $4 \cdot 3 = 12$ sätt att få rätt på exakt tre uppgifter.(Jämför övnuppg 2.16 i läroboken.)

Således blir sannolikheten att bli godkänd

$$\frac{12+1}{4^4} = \frac{13}{256} = 0.0508$$

Uppgift 2

Vi söker

$$P(A^* \cap B^* | A \cup B^*) = \frac{P((A^* \cap B^*) \cap (A \cup B^*))}{P(A \cup B^*)}$$

Om man t.ex. ritar ett Venndiagram ser man att $A^* \cap B^*$ är en äkta delmängd av $A \cup B^*$

Alltså gäller att $P(A^* \cap B^* | A \cup B^*) = \dfrac{P(A^* \cap B^*)}{P(A \cup B^*)}$

$$P(A^* \cap B^*) = 1 - PA \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - [0.6 + 0.3 - 0.1] = 0.2$$

$$P(A \cup B^*) = P(A) + P(B^*) - P(A \cap B^*) = 0.6 + 0.7 - [P(A) - P(A \cap B)] = 1.3 - [0.6 - 0.1] = 0.8$$

Alltså gäller att $P(A^* \cap B^* | A \cup B^*) = \dfrac{0.2}{0.8} = 0.25$

Uppgift 3

$$P(Z > 2) = P(\text{största värdet är större än 2}) = P(\text{ minst ett av värdena är större än 2}) =$$

$$= 1 - P(\text{båda värdena är mindre än 2}) = 1 - P(X < 2 \cap Y < 2) =$$

$$= \text{ [X och Y oberoende]} = 1 - P(X < 2)P(Y < 2)$$

$$P(X < 2) = \int_0^2 \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}dx = [-e^{-\frac{1}{2}x}]_0^2 = 1 - e^{-1}$$

$$\Rightarrow 1 - P(X < 2)P(Y < 2) = 1 - (1 - e^{-1})^2 = 0.600$$

Uppgift 4

$$V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2$$

$$E(Y) = E(5X^2) = 5(E(X^2) = 5 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)dx = 5 \cdot \int_{15}^{18} x^2 \frac{1}{18-15}dx =$$

$$= 5 \cdot \int_{15}^{18} x^2 \frac{1}{3}dx = \frac{5}{9}[x^3]_{15}^{18} = \frac{5}{9}(18^3 - 15^3) = 1365$$

$$E(Y^2) = E(25X^4) = 25E(X^4) = 25 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x^4 f_X(x)dx = 25 \cdot \int_{15}^{18} x^4 \frac{1}{18-15}dx =$$

$$= 25 \cdot \int_{15}^{18} x^4 \frac{1}{3}dx = \frac{25}{3 \cdot 5}[x^5]_{15}^{18} = \frac{25}{15}(18^5 - 15^5) = 1883655$$

$$V(Y) = E(Y^2) - (E^(Y))^2 = 1883655 - 1365^2 = 20430$$

Uppgift 5

$$E(X \cdot Y) = \sum_{x,y} x \cdot y \cdot p_{X,Y}(x,y) = 1 \cdot 2 \cdot 0.4 + 1 \cdot 4 \cdot 0.5 + 2 \cdot 2 \cdot 0 + 2 \cdot 4 \cdot 0.1 = 3.6$$