



KUNGL
TEKNISKA
HÖGSKOLAN

Matematiska institutionen
avd matematisk statistik

TENTAMEN I 5B1504 MATEMATISK STATISTIK GRUNDKURS FÖR E3
LÖRDAGEN DEN 24 AUGUSTI 2002 KL 08.00–13.00.

Examinator: Lars Holst, tel. 790 8649, e-post: lholst@math.kth.se

Tillåtna hjälpmedel: Formel- och tabellsamling i Matematisk statistik. Beta Mathematics Handbook. Räknare.

Införda beteckningar skall förklaras och definieras. Resonemang och uträkningar skall vara så utförliga att de är lätta att följa. Numeriska svar skall anges med minst två siffrors noggrannhet. Varje korrekt lösning ger 10 poäng. Gränsen för godkänt är maximalt 24 poäng.

Resultatet anslås senast fredagen den 13 september 2002 på Matematisk statistiks anslagstavla i entréplanet, Lindstedtsvägen 25, rakt fram innanför porten.

Tentamen kommer att finnas tillgänglig på elevexpeditionen sju veckor efter skrivningstillfället.

LYCKA TILL!

Uppgift 1

En komponent består av två delar med livslängder som kan uppfattas som oberoende och exponentialfördelade med väntevärden 6 månader respektive 3 månader. Komponenten fungerar så länge som båda delarna fungerar.

Beräkna sannolikheten att komponenten fungerar åtminstone en månad men inte två månader. (10 p)

Uppgift 2

De stokastiska variablerna X och Y är oberoende och Poissonfördelade med väntevärdena 1 respektive 2. Bilda $Z = X + Y/2$. Beräkna

- a) väntevärdet för Z , (2 p)
- b) variansen för Z , (3 p)
- c) sannolikheten att Z antar värdet 1. (5 p)

Uppgift 3

Vid ett fysikaliskt försök uppkommer endast resultaten $+\frac{1}{2}$ och $-\frac{1}{2}$. Sannolikheten för att få $+\frac{1}{2}$ är antingen $3/4$, $1/2$ eller $1/4$. Vid tio oberoende upprepningar av försöket erhålls $+\frac{1}{2}$ sex gånger.

Beräkna maximum-likelihoodskattningen av sannolikheten att erhålla $+\frac{1}{2}$. (10 p)

Uppgift 4

Inför valet i september publiceras ett stort antal partisympatiundersökningar. Man kan fråga sig vad som egentligen "mäts" i en del av dem och hur stora "mätfelen" kan vara. Nedanstående fråga är avsedd att illustrera en aspekt på detta problemkomplex.

I slutet av juni publicerades i dagspressen följande undersökningar. SCB genomförde 6-29 maj 2002 intervjuer med ett "representativt" urval om 9115 svenska medborgare. Av dessa uppgav 43.1%, dvs 3929 personer, S-sympatier. TEMO genomförde under ungefär samma tid intervjuer med 1731 personer varav 39.8%, dvs 689 personer, uppgav S-sympatier. En (grov) modell är att anta att 3929 är observation av $\text{Bin}(9115, p_S)$ och 689 av $\text{Bin}(1731, p_T)$. Om undersökningarna "mäter" samma sak borde gälla att $p_S = p_T$. Är det så?

För att belysa detta beräkna under ovanstående modell ett konfidensintervall för $p_S - p_T$ med konfidensgrad approximativt 95%. (10 p)

Uppgift 5

(X, Y) är tvådimensionellt normalfördelat. X har väntevärdet 1 och variansen 4, Y har väntevärdet 2 och variansen 9 och kovariansen mellan X och Y är -2 .

a) Beräkna $P(X + Y > 6)$. (5 p)

b) Bestäm ett tal c så X och $Y - cX$ blir oberoende stokastiska variabler. (5 p)

Uppgift 6

Den stationära processen $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ har väntevärdet $\sqrt{2}$ och kovariansfunktionen $r_X(\tau) = e^{-|\tau|}$. Låt den stationära processen $\{Y(t), t \in \mathbb{R}\}$ satisfiera differentialekvationen

$$Y'(t) + \sqrt{2}Y(t) = X(t).$$

Beräkna väntevärde, varians och kovariansfunktion för Y -processen.

ANMÄRKNING. För $a > 0$ gäller

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)} dx = e^{-a|t|}.$$

(10 p)



KUNGL
TEKNISKA
HÖGSKOLAN

Matematiska institutionen
avd matematisk statistik

LÖSNING TENTAMEN I 5B1504 MATEMATISK STATISTIK FÖR E3 02-08-24

Uppgift 1

Låt X beteckna komponentens livslängd. Oberoende och exponentialfördelning ger den sökta sannolikheten:

$$\begin{aligned} P(2 > X > 1) &= P(X > 1) - P(X > 2) \\ &= P(\text{delarna håller 1 månad}) - P(\text{delarna håller 2 månader}) \\ &= e^{-1/6} \cdot e^{-1/3} - e^{-2/6} \cdot e^{-2/3} = 0.24. \end{aligned}$$

Uppgift 2

- a) $E(Z) = E(X) + E(Y)/2 = 1 + 2/2 = 2.$
- b) Ur oberoendet följer $V(Z) = V(X) + V(Y)/4 = 1 + 2/4 = 3/2.$
- c) Oberoendet och Poissonantagandet ger

$$\begin{aligned} P(Z = 1) &= P(X = 0)P(Y = 2) + P(X = 1)P(Y = 0) \\ &= \frac{1^0 e^{-1}}{0!} \frac{2^2 e^{-2}}{2!} + \frac{1^1 e^{-1}}{1!} \frac{2^0 e^{-2}}{0!} = 3e^{-3} = 0.15. \end{aligned}$$

Uppgift 3

Likelihoodfunktionen, dvs "sannolikheten att få det som man fått", blir

$$L\left(\frac{3}{4}\right) = \binom{10}{6} (3/4)^6 (1/4)^4, L\left(\frac{1}{2}\right) = \binom{10}{6} (1/2)^6 (1/2)^4, L\left(\frac{1}{4}\right) = \binom{10}{6} (1/4)^6 (3/4)^4.$$

Eftersom $L(1/2) > L(3/4) > L(1/4)$ blir den sökta skattningen $1/2$.

Uppgift 4

Under den angivna modellen fås konfidensintervallet:

$$0.431 - 0.398 \pm 1.96 \sqrt{\frac{0.431 \cdot 0.569}{9115} + \frac{0.398 \cdot 0.602}{1731}} = 0.033 \pm 0.025 = (0.008, 0.058).$$

Uppgift 5

Tvådimensionell normalfördelning ger att linjärkombinationer av X och Y är normalfördelade och att okorrelerade är samma som oberoende.

a) $E(X + Y) = 1 + 2 = 3$, $V(X + Y) = 4 + 9 + 2 \cdot (-2) = 9$, vilket ger att $X + Y$ är $N(3, \sqrt{9})$ och därmed $P(X + Y > 6) = 1 - \Phi((6 - 3)/\sqrt{9}) = 0.16$.

b) $0 = C(X, Y - cX) = C(X, Y) - c \cdot C(X, X) = -2 - c \cdot 4$ ger $c = -1/2$.

Uppgift 6

Differentialekvationen kan betraktas som ett linjärt filter för vilket insignalen $x(t) = e^{i\omega t}$ ger utsignalen $y(t) = e^{i\omega t}/(i\omega + \sqrt{2})$ och därmed $H(\omega) = 1/(i\omega + \sqrt{2})$. X -processen har spektraltätheten $2/(1 + \omega^2)$ (tag $a = 1$ i anm.). Filtersatsen ger att Y -processen får spektraltätheten

$$\frac{1}{2 + \omega^2} \frac{2}{1 + \omega^2} = \frac{2}{1 + \omega^2} - \frac{2}{2 + \omega^2}.$$

Motsvarande kovariansfunktion (ur anm.) är

$$r_Y(\tau) = e^{-|\tau|} - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|\tau|}.$$

Väntevärdet blir $E(Y(t)) = H(0)E(X(t)) = (1/\sqrt{2})\sqrt{2} = 1$ och variansen blir $V(Y(t)) = r_Y(0) = 1 - 1/\sqrt{2}$.