Kungl
Tekniska
Högskolan

Matematiska institutionen
avd matematisk statistik

TENTAMEN I 5B1504 MATEMATISK STATISTIK GRUNDKURS FÖR E3
TORSDAGEN DEN 9 JANUARI 2003 KL 08.00–13.00.

Examinator: Lars Holst tel. 790 8649

Tillåtna hjälpmedel: Formel- och tabellsamling i Matematisk statistik. Beta Mathematics Handbook. Räknare.

Införda beteckningar skall förklaras och definieras. Resonemang och uträkningar skall vara så utförliga att de är lätta att följa. Numeriska svar skall anges med minst två siffrors noggrannhet. Tentamen består av 6 uppgifter. Varje korrekt lösning ger 10 poäng. Gränsen för godkänt är preliminärt 24 poäng.

Resultatet anslås senast torsdagen den 30 januari 2003 på Matematisk statistiks anslagstavla i entréplanet, Lindstedtsvägen 25, rakt fram innanför porten.

Tentamen kommer att finnas tillgänglig på elevexpeditionen sju veckor efter skrivningstillfället.

Lycka till!

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

Uppgift 1

För händelserna A och B gäller att $P(A) = 0.1$, $P(B) = 0.2$ och $P(A \cup B) = 0.25$.

a) Beräkna sannolikheten att ingen av händelserna A och B inträffar. (5 p)

b) Beräkna sannolikheten att exakt en av A och B inträffar. (5 p)

Uppgift 2

Två oberoende slumptal X_1 och X_2 från likformig sannolikhetsfördelning över enhetsintervallet $(0,1)$ genereras. Låt $U = \max(X_1, X_2)$ och $V = \min(X_1, X_2)$ vara det största respektive minsta av slumptalen.

a) Visa att U:s täthetsfunktion är $f_U(u) = 2u$ för $0 < u < 1$. (4 p)

b) Beräkna $E(U)$, $E(V)$ och $E(U - V)$. (6 p)

Uppgift 3

För bestämning av två okända konstanter b och c har vid ett försök följande mätvärden erhållits: $-0.9, 1.2, -1.1, 1.0$. Dessa kan i nämnd ordning uppfattas som observationer av oberoende stokastiska variabler med samma varians och med väntevärdena $-b-c$, $-b+c$, $b-c$, $b+c$ respektive.

Härled skattningar av b och c med minsta-kvadratmetoden. (10 p)

Uppgift 4

Vid senaste Folk- och Bostadsräkningen, som gjordes för c:a 10-15 år sedan, har en miljonpopulation av individer klassificerats i fyra klasser A, B, C, D, vars relativa storlekar var 20%, 30%, 10%, 40% respektive. Förra året klassificerades ett slumpmässigt urval om 100 individer på samma sätt. Av dessa tillhörde $13, 37, 17, 33$ i nämnd ordning ovanstående klasser.

a) Utför ett lämpligt signifikanstest för att undersöka om proportionerna av klasserna i populationen har förändrats sedan den senaste Folk- och Bostadsräkningen på signifikansnivån 5% (7 p)

b) och på nivån 1%. (3 p)

Uppgift 5

Låt $U_1, U_2, \ldots$ vara oberoende normalfördelade stokastiska variabler alla med väntevärdet 0 och variansen 1. Bilda

$$X_n = X_{n-1}/2 + U_n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

där X_0 är normalfördelad med väntevärdet 0 och varians σ^2, dessutom är X_0 oberoende av $U_1, U_2, \ldots$.

a) Bestäm σ^2 så att $X_0, X_1, X_2, \ldots$ alla får samma sannolikhetsfördelning och ange denna. (5 p)

b) För σ^2 enligt a) bestäm fördelningen för $X_n - X_{n-1}$ där $n = 1, 2, \ldots$. (5 p)

Uppgift 6

Den stationära stokastiska processen $\{X(t), t \in R\}$ är normalfördelad med den kända spektraltätheten $S_X(\omega)$. Låt processerna $\{Y_i(t), t \in R\}$, $i = 1, 2$, satisfiera följande:

$$Y_1'(t) + Y_1(t) = X(t), \quad Y_2(t) = \int_0^\infty e^{-u} X(t-u) du.$$

Avgör om Y-processerna båda är normalfördelade med samma väntevärde och samma kovariansfunktion, dvs avgör om de är likafördelade. (10 p)

KUNGL
TEKNISKA
HÖGSKOLAN

Matematiska institutionen
avd matematisk statistik

LÖSNING TENTAMEN I 5B1504 MATEMATISK STATISTIK GRUNDKURS FÖR E3 03-01-09

Uppgift 1

a) $P(\text{ingen av } A \text{ och } B \text{ inträffar}) = P(A^* \cap B^*) = 1 - P(A \cup B) = 0.75$.
b) Additionssatsen $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ger

$$P(A \cap B) = 0.1 + 0.2 - 0.25 = 0.05$$

och den sökta sannolikheten blir

$$P(A^* \cap B) + P(A \cap B^*) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = 0.25 - 0.05 = 0.20.$$

Uppgift 2

a) För $0 < u < 1$ så

$$F_U(u) = P(U \leq u) = P(\max(X_1, X_2) \leq u) = P(X_1 \leq u)P(X_2 \leq u) = u^2$$

och därmed

$$f_U(u) = F_U'(u) = 2u.$$

b) Vi har

$$E(U) = \int_0^1 u \cdot 2u \, du = \left[2u^3/3\right]_0^1 = 2/3.$$

Av symmetri har V samma fördelning som $1 - U$. Varav

$$E(V) = E(1 - U) = 1 - E(U) = 1/3.$$

Alternativt har vi $V = X_1 + X_2 - U$, som ger $E(V) = 1/2 + 1/2 - 2/3 = 1/3$. Därmed

$$E(U - V) = E(U) - E(V) = 2/3 - 1/3 = 1/3.$$

ANM. Enhetsintervallet delas av X_1, X_2 i tre delar med längder $V, U - V, 1 - U$, som alla har samma sannolikhetsfördelning. Längderna är inte oberoende stokastiska variabler, t ex är summan av dem ett.

Uppgift 3

Bilda

$$Q(b,c) = (-0.9 + b + c)^2 + (1.2 + b - c)^2 + (-1.1 - b + c)^2 + (1.0 - b - c)^2.$$

Derivering och förenkling ger ekvationerna

$$0 = \frac{\partial Q}{\partial b} = 2(0.4 + 4b), \quad 0 = \frac{\partial Q}{\partial c} = 2(-4.2 + 4c).$$

Härav erhålls att $b = -0.1$ och $c = 1.05$ minimerar $Q(b,c)$. Därmed ges de sökta minsta-kvadratskattningarna av b och c av -0.1 respektive 1.05.

Uppgift 4

Bilda χ^2-teststorheten

$$Q = (13-20)^2/20 + (37-30)^2/30 + (17-10)^2/10 + (33-40)^2/40 = 490/48 = 10.2.$$

Om hypotesen H_0 "relativa storlekarna är oförändrade" är sann så är 10.2 observation av (approximativt) $\chi^2(3)$. Hypotesen förkastas för stora värden på Q.

Ur tabell erhålls $\chi^2_{0.05}(3) = 7.81 < 10.2 < \chi^2_{0.01}(3) = 11.3$. Härav följer på de angivna signifikansnivåerna att

a) H_0 kan förkastas och

b) H_0 kan ej förkastas.

Vi har *-signifikant avvikelse från nollhypotesen eller P-värdet ligger mellan 0.01 och 0.05 (se direktmetoden i Blom sid 254). Ofta brukar man nöja sig med $P \leq 0.05$ för att anse en avvikelse vara "statistiskt säkerställd", så i detta fall hade det ansetts vara statistiskt visat att de relativa storlekarna förändrats.

Uppgift 5

a) Eftersom X_0 och U_1 är oberoende och normala så fås $X_1 \in N(0, \sqrt{\sigma^2/4+1})$. Alltså har X_0 och X_1 samma fördelning om $\sigma^2 = \sigma^2/4 + 1$ dvs om $\sigma^2 = 4/3$. Argumentet upprepas för X_1, X_2 etc. Med $\sigma^2 = 4/3$ är alla $X_0, X_1, \ldots$ N$(0, \sqrt{4/3})$.

b) Uppenbarligen är X_{n-1} oberoende av U_n. Vi får därför

$$X_n - X_{n-1} = \frac{1}{2}X_{n-1} + U_n - X_{n-1} = U_n - \frac{1}{2}X_{n-1} \in N(0, \sqrt{1 + (4/3)/2^2}) = N(0, \sqrt{4/3}).$$

Uppgift 6

Genom att använda "insignalen" $x(t) = e^{i\omega t}$ ser man att det linjära filtret $y'(t) + y(t) = x(t)$ har frekvenssvarsfunktionen $H(\omega) = 1/(1 + i\omega)$ och att det linjära filtret $y(t) = \int_0^\infty e^{-u}x(t-u)du$ har samma frekvenssvarsfunktion. Eftersom filterna är linjära och har samma frekvenssvar följer att Y-processerna är normala med samma väntevärde och enligt filtersatsen med samma spektraltäthet och därmed har de också samma kovariansfunktion. Alltså är processerna likafördelade.