Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

KONTROLLSKRIVNING I SF1920/SF1921
SANNOLIKHETSTEORI OCH STATISTIK,
FREDAG 10 FEBRUARI 2023 KL 08.00–10.00.
Tillåtna hjälpmedel: miniräknare
Svara med minst tre värdesiffrors noggrannhet på den bifogade svarsblanketten!
För godkänt krävs att minst 3 av 5 uppgifter är korrekt besvarade.

Uppgift 1

När man spelar yatzy kastas fem tärningar samtidigt. Vad är sannolikheten att man på ett kast med fem tärningar får ett fyrtal. Dvs. att fyra av tärningarna var och en visar k st prickar samtidigt som en tärning visar j st prickar. (Där k$\neq j$.)

Uppgift 2

För händelserna A och B gäller att $P(A) = 0.3$, $P(A|B) = 0.2$ och $P(A \cup B) = 0.9$.

Beräkna $P(B)$.

Var god vänd!

Uppgift 3

Spänningen U över en resistor är 1.5 Volt. Resistorns resistans är en stokastisk variabel R som är likformigt fördelad i intervallet (12, 18) Ω, dvs. vi har täthetsfunktionen

$$f_R(x) = \begin{cases} \frac{1}{18-12} & \text{om } 12 \le x \le 18 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Beräkna standardavvikelsen för strömmen I genom resistorn. (För den som glömt allt vad el-lära heter kan påpekas att $I = \frac{U}{R}$.)

Uppgift 4

X och Y är oberoende $U(0,1)$ dvs.vi har täthetsfunktionerna

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

och

$$f_Y(y) = \begin{cases} 1 & \text{om } 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Beräkna $P(X + Y \ge 1.5)$

Uppgift 5

De stokastiska variablerna X och Y har varianserna $V(X) = 3$ och $V(Y) = 4$.
Kovariansen $\mathrm{C}(X, Y) = 2$.

Beräkna variansen $V(2X - 3Y + 2)$.

Lycka till!

Lösningsförslag

Uppgift 1

Antal möjliga utfall med hänsyn till ordningen är enligt multiplikationsprincipen 6^5. För att få antal gynnsamma utfall använder vi oss även här av multiplikationsprincipen. Vi kan få fyrtalet på 6 olika sätt(fyra ettor, fyra tvåor,...fyra sexor). För varje fyrtal kan den femte tärningen ha 5 olika utfall. Detta ger att vi har $6 \cdot 5$ gynnsamma utfall utan hänsyn till ordningen. För att få antalet gynnsamma utfall med hänsyn till ordningen kan vi t.ex. titta på fallet att vi fått serien 3,3,3,3,2. Tvåan kan placeras in på 5 positioner. Dvs. antalet gynnsamma utfall med hänsyn till ordningen blir $6 \cdot 5 \cdot 5$ och sannolikheten för fyrtal blir alltså

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot 5}{6^5} \approx 0.0193$$

Uppgift 2

$P(A|B) = 0.2$ ger att $P(A \cap B) = 0.2P(B)$

som ger $0.9 = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.3 + P(B) - 0.2P(B)$ som ger

$$P(B) = \frac{0.9 - 0.3}{1 - 0.2} = 0.75.$$

Uppgift 3

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x f_{X,Y}(x,y) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^1 x \left(\frac{9}{8} x^2 y^2\right) dy = \frac{3}{8} \int_0^2 x^3 dx = \frac{3}{8} \cdot \frac{16}{4} = \frac{3}{2} = 1.5$$

Spänningen U över en resistor är 1.5 Volt. Resistorns resistans är en stokastisk variabel R som är likformigt fördelad i intervallet (12, 18) Ω. Beräkna standardavvikelsen för strömmen I genom resistorn. (För den som glömt allt vad el-lära heter kan påpekas att $I = \frac{U}{R}$)
$I = 1.5/R$ ger

$$E(I) = 1.5E(1/R) = 1.5 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} f_R(x) dx = 1.5 \cdot \int_{12}^{18} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{6} dx = \frac{1.5}{6} \cdot (\ln(18) - \ln(12)) = 0.25 \cdot \ln(1.5) \approx 0.1014.$$

Vidare gäller att $V(I) = E(I^2) - (E(I))^2$ och vi får $E(I^2) = 1.5^2 \cdot \int_{12}^{18} \frac{1}{x^2} \frac{1}{6} dx = \frac{1.5^2}{6} \cdot (-\frac{1}{x})\Big|_{12}^{18} = \frac{1}{96}$ vilket ger $V(I) = E(I^2) - (E(I))^2 = \frac{1}{96} - (\frac{1}{4} \ln(1.5))^2 \approx 0.0001415$. Alltså blir den sökta standardavvikelsen $D(I) = \sqrt{\frac{1}{96} - (\frac{1}{4} \ln(1.5))^2} \approx 0.0119$.

Uppgift 4

Eftersom X och Y är oberoende får vi att $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$

$$\text{Dvs. } f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{om } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

$P(X+Y \geq 1.5) = \text{rita figur} = \int_{0.5}^{1} \int_{1.5-y}^{1} 1dxdy =$
$= \int_{0.5}^{1} y - 0.5dy = [\frac{y^2}{2} - 0.5y]_{0.5}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - (\frac{1}{8} - (-\frac{1}{4}) = \frac{1}{8} = 0.125$

Uppgift 5

$V(2X+3Y+2) = V(2X-3Y) = V(2X) + V(-3Y) + 2C(2X, -3Y) =$
$= 2^2V(X) + (-3)^2V(Y) + 2 \cdot 2 \cdot (-3)C(X,Y) = 12 + 36 - 24 = 24$