KTH Matematik

Avd. Matematisk statistik

KONTROLLSKRIVNING I SF1912/SF1914/SF1915/SF1916
SANNOLIKHETSTEORI OCH STATISTIK,
ONSDAG 20 SEPTEMBER 2023 KL 08.00–10.00.
Tillåtna hjälpmedel: miniräknare
Svara med minst tre värdesiffrors noggrannhet på den bifogade svarsblanketten!
För godkänt krävs att minst 3 av 5 uppgifter är korrekt besvarade.

Uppgift 1

På en universitetsavdelning är 50% av dokumenten skrivna i Word, 30% i Latex och 20% i HTML. Det känt att: 40% av Word-dokumenten överstiger 10 sidor, 20% av Latex-dokumenten överstiger 10 sidor, 20% av HTML-dokumenten överstiger 10 sidor. Vad är sannolikheten att ett slumpmässigt valt dokument innehåller mer än 10 sidor?

Uppgift 2

X är en diskret stokastisk variabel som har sannolikhetsfunktionen

$$p_X(x) = \begin{cases} a & \text{if } x = 0, \\ b & \text{if } x = 1, \\ c & \text{if } x = 2, \\ 0.3 & \text{if } x = 3, \end{cases}$$

där a, b och c är okända konstanter.
Vi vet att $P(0 < X \leq 2) = 0.4$.
Vi vet också att den betingade sannolikheten $P(X \geq 2 | X < 3) = 0.25$.

Bestäm konstanten b.

Uppgift 3

Antalet pojkar respektive flickor i en slumpmässigt vald svensk familj i ett visst område kan ses som stokastiska variabler X och Y.
Låt oss anta att den simultana sannolikhetsfunktionen $p_{X,Y}(j,k)$ ser ut på följande sätt i området:
$p_{X,Y}(0,0) = 0.2$, $p_{X,Y}(1,0) = 0.1$, $p_{X,Y}(0,1) = 0.1$, $p_{X,Y}(1,1) = 0.25$, $p_{X,Y}(2,0) = 0.05$, $p_{X,Y}(0,2) = 0.05$, $p_{X,Y}(1,2) = 0.1$, $p_{X,Y}(2,1) = 0.05$, $p_{X,Y}(2,2) = 0.1$.
T.ex. är sannolikheten för 1 pojke och 2 flickor $p_{X,Y}(1,2) = 0.1$.

Beräkna väntevärdet $E(Y^2)$.

V.g.v.!

Uppgift 4

X är en stokastisk variabel som har täthetsfunktionen

$$f_X(x) = \begin{cases} |x-1| & \text{om } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Beräkna standardavvikelsen D(X).

Uppgift 5

De stokastiska variablerna X, Y, och Z har varianserna $V(X) = 1$, V(Y) = 2 och $V(Z) = 3$.
X och Y är oberoende. X och Z är oberoende.
Kovariansen $\mathrm{C}(Z, Y) = 2$.

Beräkna variansen $V(2Y - Z + X - 5)$.

Lycka till!

Lösningsförslag

Uppgift 1

Låt A vara händelsen att ett dokument innehåller mer än 10 sidor.
Lagen om total sannolikhet ger:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(Word)P(A|Word) + P(Latex)P(A|Latex) + P(HTML)P(A|HTML) \\ &= (0.5 \cdot 0.4) + (0.3 \cdot 0.2) + (0.2 \cdot 0.2) = 0.3. \end{aligned}$$

Uppgift 2

Definitionen ger:

$0.4 = P(0 < X \leq 2) = \sum_{x=1}^{2} p_X(x) = p_X(1) + p_X(2) = b + c.$
Därför gäller att : $a = 1 - b - c - 0.3 = 1 - 0.4 - 0.3 = 0.3.$

Vi har också:

$$0.25 = P(X \geq 2 | X < 3) = \frac{P(X = 2)}{P(X \leq 2)} = \frac{c}{a + b + c}.$$

Eller,om vi också kommer ihåg att $a = 0.3$ och $c = 0.4 - b$:
$0.4 - b = 0.25(0.3 + b + 0.4 - b)$.
Lösningen av denna ekvation ger $b = 0.4 - 0.25 \cdot 0.7) = 0.225$.

Uppgift 3

$p_Y(0) = p_{X,Y}(0, 0) + p_{X,Y}(1, 0) + p_{X,Y}(2, 0) = 0.2 + 0.1 + 0.05 = 0.35,$
$p_Y(1) = p_{X,Y}(0, 1) + p_{X,Y}(1, 1) + p_{X,Y}(2, 1) = 0.1 + 0.25 + 0.05 = 0.4,$
$p_Y(2) = p_{X,Y}(0, 2) + p_{X,Y}(1, 2) + p_{X,Y}(2, 2) = 0.05 + 0.1 + 0.1 = 0.25.$
Dvs, $E(Y^2) = 0^2 \cdot (0.35) + 1^2 \cdot (0.4) + 2^2 \cdot (0.25) = 1.4$

Uppgift 4

$E(X) = \int_0^2 x f_X(x)dx = \int_0^1 x(1 - x)dx + \int_1^2 x(x - 1)dx = [\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}]_0^1 + [\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}]_1^2 =$

$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - (\frac{1}{3} - \frac{1}{2}) = 1$

$E(X^2) = \int_0^2 x^2 f_X(x)dx = \int_0^1 x^2(1 - x)dx + \int_1^2 x^2(x - 1)dx = [\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}]_0^1 + [\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}]_1^2 =$

$= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{16}{4} - \frac{8}{3} - (\frac{1}{4} - \frac{1}{3}) = \frac{3}{2}$

$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{3}{2} - 1^2 = \frac{1}{2}$

$D(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0.707.$

V.g.v.!

Uppgift 5

$V(2Y - Z + X - 5) = V(2Y - Z + X) =$[p.g.a ober]$=$

$V(2Y - Z) + V(X) = V(2Y) + V(-Z) + 2C(2Y, -Z) + V(X) =$

$= 4V(Y) + V(Z) - 4C(Y, Z) + V(X) = 4 \cdot 2 + 3 - 4 \cdot 2 + 1 = 4$