Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

KONTROLLSKRIVNING I SF1922/SF1923/SF1935, SANNOLIKHETSTEORI OCH STATISTIK, TORSDAG 18 APRIL 2024 KL 08.00–10.00.

Tillåtna hjälpmedel: miniräknare.

Svara med minst fyra värdesiffrors noggrannhet på den bifogade svarsblanketten.
För godkänt krävs att minst tre av fem uppgifter är korrekt besvarade.

Uppgift 1

För händelserna A, B och C vet vi att $P(A) = 0.75$, $P(B) = 0.5$, och $P(A \cup B \cup C) = 0.9275$ Vi vet också att händelserna A, B och C är oberoende. Beräkna $P(C)$.

Uppgift 2

Låt X vara en kontinuerlig stokastisk variabel med täthetsfunktion

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x/2}, & x > 0, \\ 0, & \text{annars.} \end{cases}$$

Beräkna den betingade sannolikheten $P(X < 2|X > 1)$.

Uppgift 3

Lisa drar tre kort (utan återläggning) från ett kortlek av 52 kort. Bestäm väntevärdet för antalet hjärter som Lisa fått.

Uppgift 4

Antag att man har tre stokastiska variabler, X, Y och Z. För samtliga gäller att väntevärdet är 4 och standardavvikelsen är 1. Antag att kovariansen $C(X, Z) = 1$ samt att Y är okorrelerad med X och Z. Beräkna variansen $V(X + 2Y - 3Z + 3)$.

Uppgift 5

Låt X och Y vara två oberoende stokastiska variabler med respektive sannolikhetsfunktioner

$$p_X(x) = \begin{cases} 0.3, & x = 1, \\ 0.2, & x = 2, \\ 0.5, & x = 3, \end{cases}$$

och

$$p_Y(y) = \begin{cases} 0.1, & y = 2, \\ 0.4, & y = 3, \\ 0.5, & y = 4. \end{cases}$$

Bestäm $P(Y - X = 1)$.

LÖSNINGSFÖRSLAG TILL KONTROLLSKRIVNING I SF1922 SANNOLIKHETSTEORI OCH STATISTIK, TORSDAGEN DEN 18 APRIL 2024 KL 08.00-10.00.

Uppgift 1

Från Venndiagram:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Eftersom A, B och C är oberoende, gäller det att

$$P(A \cap B) = P(A)P(B),$$

$$P(A \cap C) = P(A)P(C),$$

$$P(B \cap C) = P(B)P(C),$$

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C).$$

Sätter in nu dom samtliga fyra i den ursprungliga ekvationen, flyttar om och löser för $P(C)$. Vi får:

$$P(C) = \frac{P(A \cup B \cup C) - P(A) - P(B) + P(A)P(B)}{1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B)} = 0.42$$

Uppgift 2

Fördelningsfunktionen för s.v. X blir:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_0^x \frac{1}{2} e^{-u/2} du = 1 - e^{-x/2}.$$

Vi har:

$$P(X < 2 | X > 1) = \frac{P(1 < X < 2)}{P(X > 1)} = \frac{P(X \leq 2) - P(X \leq 1)}{1 - P(X \leq 1)} = \frac{F_X(2) - F_X(1)}{1 - F_X(1)} =$$

$$= \frac{\left(1 - e^{-1}\right) - \left(1 - e^{-1/2}\right)}{1 - \left(1 - e^{-1/2}\right)} = \frac{e^{-1/2} - e^{-1}}{e^{-1/2}} = 1 - e^{-1/2} \approx 0.39347$$

Observera att $P(X < 2 | X > 1) = 1 - e^{-1/2} = F_X(1) = P(X < 1)$. Dvs, s.v. X, som är exponentialfördelad ($X \in Exp(0.5)$), ”saknar minne”.

Uppgift 3

Låt X vara antal hjärtor av de tre dragna kort. Vi har:

$$P(X = 0) = \frac{\binom{39}{3}}{\binom{52}{3}} = \frac{39 \cdot 38 \cdot 37}{52 \cdot 51 \cdot 50} \approx 0.41353,$$

$$P(X=1)=\frac{\binom{13}{1}\binom{39}{2}}{\binom{52}{3}}=\frac{3\cdot 13\cdot 39\cdot 38}{52\cdot 51\cdot 50}\approx 0.43588,$$

$$P(X=2)=\frac{\binom{13}{2}\binom{39}{1}}{\binom{52}{3}}=\frac{3\cdot 39\cdot 13\cdot 12}{52\cdot 51\cdot 50}\approx 0.13765,$$

$$P(X=3)=\frac{\binom{13}{3}}{\binom{52}{3}}=\frac{13\cdot 12\cdot 11}{52\cdot 51\cdot 50}\approx 0.0129$$

Därmed blir det sökta väntevärdet:

$$E(X)=0\cdot(0.41353)+1\cdot(0.43588)+2\cdot(0.13765)+3\cdot(0.0129)\approx 0.74988$$

Observera att väntevärdet för antalet hjärter skulle bli 1 hjärter om Lisa dragit 4 kort istället.

Uppgift 4

Notera att $V(X)=V(Y)=V(Z)=1$, $C(X,Z)=1$ och $C(X,Y)=C(Z,Y)=0$.

$$\begin{aligned}
V(X+2Y-3Z+3) &= V(X)+V(2Y)+V(-3Z)+2C(X,2Y)+2C(X,-3Z)+2C(2Y,-3Z)\\
&= V(X)+4V(Y)+9V(Z)+4C(X,Y)-6C(X,Z)-12C(Y,Z)\\
&= 1+9+4-6=8.
\end{aligned}$$

Uppgift 5

Vi har:

$$\begin{aligned}
P(Y-X=1) &= P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=3)+P(X=3,Y=4)\\
&= |X \text{ och } Y \text{ är oberoende s.v.}|\\
&= p_X(1)p_Y(2)+p_X(2)p_Y(3)+p_X(3)p_Y(4)\\
&= 0.3\cdot 0.1+0.2\cdot 0.4+0.5\cdot 0.5=0.36
\end{aligned}$$