Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

TENTAMEN I SF1904 MARKOVPROCESSER
TISDAGEN DEN 28 MAJ 2019 KL 14.00–19.00.

Examinator: Björn-Olof Skytt tel. 790 86 49
Kursansvarig: Björn-Olof Skytt tel. 790 86 49
Tillåtna hjälpmedel: Formel- och tabellsamling i Matematisk statistik, Mathematics Handbook (Beta), hjälpreda för miniräknare, miniräknare.

Införda beteckningar skall förklaras och definieras. Resonemang och uträkningar skall vara så utförliga och väl motiverade att de är lätta att följa. Numeriska svar skall anges med minst två siffrors noggrannhet. Tentamen består av 5 uppgifter. Varje korrekt lösning ger 10 poäng. Gränsen för godkänt är preliminärt 20 poäng. Möjlighet att komplettera ges för tentander med preliminärt 18–19 poäng. Tid och plats för komplettering kommer att anges på kursens hemsida. Det ankommer på dig själv att ta reda på om du har rätt att komplettera.

Tentamen kommer att vara rättad inom tre arbetsveckor från skrivningstillfället och kommer att finnas tillgänglig på studentexpeditionen minst sju veckor efter skrivningstillfället.

Uppgift 1

En Markovkedja i diskret tid har tillstånden $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ och övergångsmatrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.7 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Klassificera tillstånden och avgör om $\lim_{n\to\infty} P(X_n = j | X_0 = i)$ för $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ existerar samt beräkna i så fall dessa gränsvärden. (10 p)

Uppgift 2

Ett system består av två parallellkopplade komponenter, dvs systemet fungerar om åtminstone en av komponenterna fungerar. Dessa har dels felintensiteten λ_1 var för sig då systemet är helt, dels en gemensam felintensitet (höga spänningar, t.ex. åsknedslag, slår ut bägge komponenterna samtidigt) med intensiteten λ. När den ena komponenten är sönder, har den återstående felintensiteten λ_2 ($> \lambda_1$) (och dessutom den gemensamma felintensiteten λ).

Beräkna förväntad livslängd för systemet om man startar med två hela komponenter. (10 p)

Uppgift 3

En Poissonprocess $(X(t); t \geq 0)$ har $E(X(t)) = 3t$. Låt T vara tiden då processen för första gången antar värdet 2.

Bestäm $P(T \leq t \mid X(2) = 2)$ som funktion av t. (10 p)

Uppgift 4

Turister anländer till en utsiktsplats enligt en Poissonprocess med intensitet λ och stannar på platsen en Exp(μ)-fördelad tid. Hur många personer som helst kan njuta av utsikten samtidigt.

Visa att det finns en gränsfördelning och beräkna det förväntade antalet personer som vid en viss tidpunkt samtidigt njuter av utsikten. (10 p)

Uppgift 5

En restaurang har två toaletter som ligger brevid varandra. De som vill gå på toaletten anländer enligt en Poissonprocess med intensitet $\lambda = 20$ besökare per timme. Ett toalettbesök varar en exponentialfördelad tid med väntevärde 4 minuter. De båda toaletterna har en gemensam kö.

Bestäm den förväntade tiden en person måste stå i kö. Bestäm även sannolikheten att man måste stå i kö. (10 p)

Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

LÖSNINGAR TILL
TENTAMEN I SF1904 MARKOVPROCESSER
TISDAGEN DEN 28 MAJ 2019 KL 14.00–17.00

Uppgift 1

Vi noterar att 1 är ett absorberande tillstånd. Vidare är $\{4, 5, 6\}$ en sluten irreducibel delklass, medan 2 och 3 är genomgångstillstånd. Om vi klumpar ihop 4, 5 och 6 i ett tillstånd får vi en A-kedja med övergångsmatrisen

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.7 & 0.2 \\ 0.2 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Om vi i likhet med formelsamlingen låter $a_{ij} = P(\text{absorption i tillstånd } j \mid \text{start i tillstånd } i)$ så erhåller vi $a_{21} = 0.1 + 0.7a_{31}$ och $a_{31} = 0.2 + 0.8a_{21} = 0.2 + 0.8(0.1 + 0.7a_{31}) = 0.2 + 0.08 + 0.56a_{31}$ som ger

$$a_{31} = \frac{0.28}{(1 - 0.56)} = \frac{28}{44} = \frac{7}{11}$$

och alltså $a_{3,\{4,5,6\}} = 4/11$. Vidare är enligt ovan $a_{21} = 0.1 + 0.7a_{31} = 0.1 + 0.7 \cdot 7/11 = 6/11$ dvs $a_{2,\{4,5,6\}} = 5/11$.

Enligt denna A-kedjestruktur fastnar kedjan antingen i 1 eller i den slutna delmängden $\{3, 4, 5\}$. Om vi betraktar delkedjan på $\{4, 5, 6\}$ så har den övergångsmatrisen

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

och denna är irreducibel ty $4 \to 5 \to 6 \to 4$ och aperiodisk ty $4 \to 5 \to 4$ (två steg) och $4 \to 5 \to 6 \to 4$ (tre steg) och 2 och 3 är relativt prima tal. Alltså är denna delkedja ergodisk. Sker absorption i delmängden $\{4, 5, 6\}$ så är den stationära fördelningen på denna delmängden den asymptotiska fördelningen. För att bestämma denna stationära fördelning $\pi = (\pi_4, \pi_5, \pi_6)$ löser vi ekvationssystemet $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$ dvs

$$\begin{cases} \pi_4 & = 0.5\pi_5 + \pi_6 \\ \pi_5 & = \pi_4 \\ \pi_6 & = 0.5\pi_5 \\ 1 & = \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 \end{cases}$$

som ger $\pi_4(1 + 1 + 0.5) = 1$ dvs $\pi_4 = \pi_5 = 2/5$ och $\pi_6 = 1/5$.

Vi får alltså gränsvärdena existerar för alla i och j samt att

1) $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 1 \mid X_0 = 1) = 1$ och

2) $\lim_{n\to\infty} P(X_n = j \mid X_0 = i) = 2/5$ för $j = 4, 5$
samt $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 6 \mid X_0 = i) = 1/5$ för $i = 4, 5, 6$.

3) $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 1 \mid X_0 = 2) = 6/11$

4) $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 1 \mid X_0 = 3) = 7/11$

5) $\lim_{n\to\infty} P(X_n = j \mid X_0 = 2) = 5/11 \cdot 2/5$ för $j = 4, 5$
samt $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 6 \mid X_0 = 2) = 5/11 \cdot 1/5$

6) $\lim_{n\to\infty} P(X_n = j \mid X_0 = 3) = 4/11 \cdot 2/5$ för $j = 4, 5$
samt $\lim_{n\to\infty} P(X_n = 6 \mid X_0 = 2) = 5/11 \cdot 1/5$

samt att de övriga gränsvärdena är 0.

Uppgift 2

Vi inför tillstånden

$$E_i = i \text{ stycken enheter fungerar}, \; i = 0, 1, 2.$$

Vi får intensitetsmatrisen

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ (\lambda_2 + \lambda) & -(\lambda_2 + \lambda) & 0 \\ \lambda & 2\lambda_1 & -(\lambda + 2\lambda_1) \end{pmatrix}$$

Sätt

$$t_i = \text{ förväntad tid till absorption i } E_0 \text{ givet start i } E_i, \; i = 1, 2.$$

Vi får då (FS 14.2.5),

$$t_1 = \frac{1}{\lambda_2 + \lambda} \text{ och } t_2 = \frac{1}{\lambda + 2\lambda_1} + \frac{2\lambda_1}{\lambda + 2\lambda_1} t_1$$

som ger

$$t_2 = \frac{1}{\lambda + 2\lambda_1}\left(1 + \frac{2\lambda_1}{\lambda_2 + \lambda}\right) = \frac{\lambda + 2\lambda_1 + \lambda_2}{(\lambda + 2\lambda_1)(\lambda_2 + \lambda)}.$$

Uppgift 3

Vi gör först observationen att $\{T \le t\} = \{X(t) \ge 2\}$.

Med $t < 2$ får vi

$$P\left(T \le t \mid X(2) = 2\right) = \frac{P\left(X(t) \ge 2 \cap X(2) = 2\right)}{P\left(X(2) = 2\right)} = \frac{P\left(X(t) = 2 \cap X(2) - X(t) = 0\right)}{P\left(X(2) = 2\right)}$$

$$= \frac{P\left(X(t) = 2\right) P\left(X(2) - X(t) = 0\right)}{P\left(X(2) = 2\right)} = \frac{\frac{(3t)^2}{2!} e^{-3t} \frac{(3(2-t))^0}{0!} e^{-3(2-t)}}{\frac{(3\cdot 2)^2}{2!} e^{-3\cdot 2}} = \frac{t^2}{4}$$

Om $t \ge 2$ är $P(T \le t \mid X(2) = 2) = 1$ dvs

$$P(T \le t \mid X(2) = 2) = \begin{cases} 0 & \text{för } t \le 0, \\ t^2/4 & \text{för } 0 \le t \le 2, \\ 1 & \text{för } t \ge 2 \end{cases}$$

Uppgift 4

Antalet turister på platsen beskrivs av en födelse-döds-process med

$$\lambda_n = \lambda \quad \text{och} \quad \mu_n = n\mu.$$

Detta ger, jmf. FS sid. 10, att

$$\rho_n = \frac{\lambda_0\lambda_1\cdots\lambda_{n-1}}{\mu\cdot 2\mu\cdots n\mu} = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}$$

vilket ger

$$\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n = e^{\lambda/\mu}.$$

Eftersom $\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n < \infty$ för alla λ och μ och

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n\rho_n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{\lambda(\lambda/\mu)^n} = \infty$$

så existerar alltid en gränsfördelning och den är given av

$$p_n = \frac{\rho_n}{\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n} = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}\,e^{-\lambda/\mu}.$$

Således är antalet turister Po(λ/μ)-fördelat och vi har $\underline{\ell = \lambda/\mu}$.

Uppgift 5

Antalet personer vid toaletterna beskrivs av en Markovkedja $(X(t); t \geq 0)$, en födelse-/dödsprocess med ankomstintensitet $\lambda = 20$, betjäningsintensitet $\mu = 60/4 = 15$ per timme, och antalet betjäningsstationer $c = 2$ (ett M/M2-system).
Eftersom trafikintensiteten $\rho = \lambda/c\mu = 20/(2\cdot15) = 2/3 < 1$ är systemet stabilt och Markovkedjan är ergodisk med gränsfördelning given av stationärfördelningen (se §16.1) $\boldsymbol{p} = (p_0, p_1, ...)$
där (enl §16.2 för system med c=2):

$$p_n = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1+\rho}, & n = 0 \\ \frac{2(1-\rho)\rho^n}{1+\rho}, & n = 1, 2, ... \end{cases}$$

Genomsnittlig tid i kön är $w_k = \frac{l_q}{\lambda}$ där (enl §16.2) $l_q = \frac{2\rho^3}{1-\rho^2} = \frac{2\cdot(\frac{2}{3}]^3}{1-(\frac{2}{3}]^2} = \frac{16}{15}$

Detta ger att $w_k = 60 \cdot \frac{\frac{16}{15}}{20} = 3.2$ minuter.

Sannolikheten att man måste stå i kö är sannolikheten att det är minst 2 i systemet $= 1-(p_0+p_1) = 1 - (\frac{1-\rho}{1+\rho} + \frac{2(1-\rho)\rho}{1+\rho}) = ... = 1 - \frac{21}{45} = \frac{24}{45} = 0.53$.