Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

TENTAMEN I SF1904 MARKOVPROCESSER FREDAGEN DEN 16 AUGUSTI 2019 KL 08.00–13.00.

Examinator: Björn-Olof Skytt tel. 790 86 49.
Tillåtna hjälpmedel: Formel- och tabellsamling i Matematisk statistik, Mathematics Handbook (Beta),hjälpreda för miniräknare, miniräknare.

Införda beteckningar skall förklaras och definieras. Resonemang och uträkningar skall vara så utförliga och väl motiverade att de är lätta att följa. Numeriska svar skall anges med minst två siffrors noggrannhet. Tentamen består av 5 uppgifter. Varje korrekt lösning ger 10 poäng. Gränsen för godkänt är preliminärt 20 poäng. Möjlighet att komplettera ges för tentander med 18–19 poäng. Tid och plats för komplettering kommer att anges på kursens hemsida. Det ankommer på dig själv att ta reda på om du har rätt att komplettera.

Tentamen kommer att vara rättad inom tre arbetsveckor från skrivningstillfället och kommer att finnas tillgänglig på studentexpeditionen minst sju veckor efter skrivningstillfället.

Uppgift 1

I två behållare finns sammanlagt 6 bollar varav 3 är gula och 3 är blå. Det finns alltid tre bollar i varje behållare. Vi låter nu bollar slumpmässigt byta plats mellan behållarna. Ett platsbyte går till på så sätt att samtidigt som det slumpmässigt dras en boll ur den vänstra behållaren så dras det slumpmässigt en boll ur den högra behållaren och sedan läggs den boll som dragits ur den vänstra behållaren i den högra behållaren och tvärtom. Antalet gula bollar i den vänstra behållaren varierar då som en Markovkedja.

a) Undersök om denna Markovkedja har en unik asymptotisk fördelning och beräkna i så fall denna. (6 p)

b) Antag nu att vi startar med 2 blå bollar (och 1 gul) i den vänstra behållaren och 2 gula bollar (och 1 blå) i den högra. Vad är då sannolikheten att det ligger 3 blå bollar i den vänstra behållaren innan det ligger 3 gula bollar i den vänstra behållaren? (4 p)

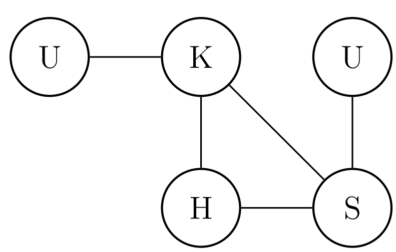
Uppgift 2

a) I en lägenhet finns tre rum (hallen, köket, och sovrummet). En ilsken geting har kommit in i lägenheten. Den förflyttar sig från hallen till köket med sannolikheten $1/2$ och från hallen till sovrummet med sannolikheten $1/2$. Tiden den stannar i hallen är exponentialfördelad med väntevärde 3 sekunder. Från köket till hallen förflyttar den sig med sannolikheten $1/3$ och från köket till sovrummet med sannolikheten $2/3$. Tiden den stannar i köket är exponentialfördelad med väntevärde 7 sekunder. Från sovrummet till hallen förflyttar den sig med sannolikheten $1/3$ och från sovrummet till köket med sannolikheten $2/3$. Tiden den stannar i sovrummet är exponentialfördelad med väntevärde 7 sekunder.

Hur stor andel av tiden befinner sig getingen i hallen? (5 p)

b) I hopp om att getingen ska flyga ut öppnar vi ett fönster i köket och ett fönster i sovrummet. Då gäller fortfarande att getingen förflyttar sig från hallen till köket med sannolikheten $1/2$ och från hallen till sovrummet med sannolikheten $1/2$, och att tiden den stannar i hallen är exponentialfördelad med väntevärde 3 sekunder. Däremot är nu sannolikheten $1/5$ att den förflyttar sig från köket till hallen och sannolikheten $2/5$ att den förflyttar sig från köket till sovrummet och sannolikheten att den flyger ut från köket $2/5$. Fortfarande är tiden den stannar i köket exponentialfördelad med väntevärde 7 sekunder. Vidare är nu sannolikheten $1/5$ att den förflyttar sig från sovrummet till hallen och sannolikheten $2/5$ att den förflyttar sig från sovrummet till köket och sannolikheten att den flyger ut från sovrummet $2/5$. Fortfarande är även tiden den stannar i sovrummet exponentialfördelad med väntevärde 7 sekunder.

Hur lång är den förväntade tiden det tar för getingen att lämna lägenheten om den startar i hallen? (5 p)



Figur 1: Schema över hur rummen (och i b-uppgiften utflygsvägar) hänger ihop i lägenheten.

Uppgift 3

En Poissonprocess $(X(t); t \geq 0)$ har E(X(t)) = 3t. Låt T vara tiden då processen första gången antar värdet 2.
Bestäm $f_T(t)$ som funktion av t. (10 p)

Uppgift 4

I ett kösystem med en betjäningsstation där potentiella kunder anländer enligt en Poissonprocess med ankomstintensitet λ ansluter sig en potentiell kund med sannolikheten $1/\sqrt{k+1}$ om det finns k kunder i systemet, $k = 0, 1, 2, \cdots$. Vidare är betjäningstiden exponentialfödelad med väntevärde $\sqrt{k}/\mu$ om k kunder finns i systemet, $k = 1, 2, \cdots$.

Härled villkor på μ och λ för att en stationär fördelning skall finnas samt bestäm förväntat antal kunder i systemet efter lång tid som funktion av μ och λ. (10 p)

Uppgift 5

I en fabrik kontrolleras varje produkt som tillverkats innan den går vidare till kund. Om produkten då visar sig vara defekt kan den ha tre typer av fel: Fel av typ A, fel av typ B, fel av typ C. Är produkten defekt har den alltid fel av typ A. Produkten kan då även ha fel av endast typ B eller fel av typ B och fel av typ C. Fel av typ C finns dock endast om det finns både fel av typ A och fel av typ B. Reparationsverkstaden består av tre avdelningar som har namn efter vilket typ av fel de åtgärdar: avdelning A, avdelning B och avdelning C. En defekt produkt skickas således alltid först till avdelning A. På avdelning A blir den med sannolikhet 0.6 färdigreparerad och går därifrån till kund, men med sannolikhet 0.4 går den vidare till avdelning B. På avdelning B blir den med sannolikhet 0.75 färdigreparerad och går därifrån till kund, men med sannolikhet 0.25 går den vidare till avdelning C. På avdelning C blir den med sannolikhet 1 färdigreparerad och går därifrån till kund.
Defekta produkter anländer till reparationsverkstaden enligt en Poissonprocess med intensitet 20 i timmen. Avdelning A har två reparationslag som arbetar parallellt och som båda har reparationstider som är exponentialfördelade med intensiteten 16 reparerade produkter i timmen. Avdelning B har ett reparationslag som har reparationstider som är exponentialfördelade med intensiteten 16 reparerade produkter i timmen. Avdelning C har ett reparationslag som har reparationstider som är exponentialfördelade med intensiteten 4 reparerade produkter i timmen.

a) Beräkna förväntat antal defekta produkter i reparationsverkstaden vid ”asymptotisk” tid. (7 p)

b) Bestäm förväntad tid en defekt produkt tillbringar i reparationsverkstaden. (3 p)

Lycka till!

Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

LÖSNINGAR TILL
TENTAMEN I SF1904 MARKOVPROCESSER
TISDAGEN DEN 9 JUNI 2015 KL 14.00–19.00

Uppgift 1

a) Inför tilståndsrummet $\mathbf{E}$ = {0 gula bollar i vänster behållare, 1 gul boll i vänster behållare , 2 gula bollar i vänster behållare, 3 gula bollar i vänster behållare }$\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\mathbf{E} = \{0,1,2,3\}$
Vi får nu övergångsmatrisen

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & 0 \\ 0 & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kedjan är ergodisk ty 1) E är ändligt, 2) den är irreducibel ty $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1$ samt 3) aperiodisk ty $p_{11} > 0$. Vi får stationära (och alltså även asymptotiska) fördelningen $\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3)$ som lösning till $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}$ och $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$. Vi får

$$\begin{aligned}
\pi_0 &= \frac{1}{9}\pi_1 \\
\pi_1 &= \pi_0 + \frac{4}{9}\pi_1 + \frac{4}{9}\pi_2 \\
\pi_2 &= \frac{4}{9}\pi_1 + \frac{4}{9}\pi_2 + \pi_3 \\
\pi_3 &= \frac{1}{9}\pi_2 \\
1 &= \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3
\end{aligned}$$

som ger $\boldsymbol{\pi} = (\frac{1}{20}, \frac{9}{20}, \frac{9}{20}, \frac{1}{20})$.

b) Vi kan se det som att vi har två absorberande tillstånd, nämligen 0 och 3 och att vi då söker sannolikheten a_{10} vilket är sannolikheten att absorberas i tillstånd 0 vid start i tillstånd 1. Här kan vi använda oss av §15.1.5 i F.S. och får då

$$\begin{aligned}
a_{10} &= \frac{1}{9} + \frac{4}{9}a_{10} + \frac{4}{9}a_{20} \\
a_{20} &= 0 + \frac{4}{9}a_{10} + \frac{4}{9}a_{20}
\end{aligned}$$

som ger $a_{10} = \frac{5}{9}$ vilket är svaret.

Uppgift 2

a) Inför tilståndsrummet $\mathbf{E} = \{\text{Hall, Kök, Sovrum }\}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mathbf{E} = \{1{,}2{,}3\}$
Getingens läge beskriver en Markovprocess med uthoppsintensiteter $\mu_1 = \frac{1}{3}$, $\mu_2 = \frac{1}{7}$, $\mu_3 = \frac{1}{7}$ och med övergångsmatrisen

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

vilket ger intensitetsmatrisen

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{21} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{21} \\ \frac{1}{21} & \frac{2}{21} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

Kedjan är ergodisk ty 1) E är ändligt, 2) den är irreducibel ty $1 \to 2 \to 3 \to 1$ Vi får stationära (och alltså även asymptotiska) fördelningen $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ som lösning till $\boldsymbol{\pi Q} = \mathbf{0}$ och $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$. Vi får

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{3}\pi_1 + \frac{1}{21}\pi_2 + \frac{1}{21}\pi_3 \\ 0 &= \frac{1}{6}\pi_1 - \frac{1}{7}\pi_2 + \frac{2}{21}\pi_3 \\ 0 &= \frac{1}{6}\pi_1 + \frac{2}{21}\pi_2 - \frac{1}{7}\pi_3 \\ \pi_3 &= \frac{1}{9}\pi_2 \\ 1 &= \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \end{aligned}$$

som ger $\boldsymbol{\pi} = (\frac{1}{8}, \frac{7}{16}, \frac{7}{16})$.

D.v.s. getingen befinner sig i hallen $\frac{1}{8}$ av tiden.
b) Nu inför vi ytterligare ett tillstånd i tilståndsrummet och får $\mathbf{E} = \{\text{Hall, Kök, Sovrum, Ut }\}\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mathbf{E} = \{1{,}2{,}3{,}4\}$
Eftersom $\{4\}$ är ett absorberande tillstånd får vi nu övergångsmatrisen

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

vilket ger intensitetsmatrisen

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{35} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{35} & \frac{2}{35} \\ \frac{1}{35} & \frac{2}{35} & -\frac{1}{7} & \frac{2}{35} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi använder oss nu av §15.2.5 och söker tiden t_1 till absorbtion då vi startar i tillstånd $\{1\}$ vilket ger följande ekvationssystem

$$t_1 = 3 + \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} t_2 + \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} t_3$$
$$t_2 = 7 + \frac{\frac{1}{35}}{\frac{1}{7}} t_1 + \frac{\frac{2}{35}}{\frac{1}{7}} t_3$$
$$t_3 = 7 + \frac{\frac{1}{35}}{\frac{1}{7}} t_1 + \frac{\frac{2}{35}}{\frac{1}{7}} t_2$$

Av symmetriskäl är $t_2 = t_3$ vilket gör att t_1 ganska enkelt fås till 22. Det förväntade tiden det tar för getingen att lämna lägenheten om den startar i hallen är således 22 sekunder.

Uppgift 3

$$F_T(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = 1 - P(X(t) < 2) =$$
$$= 1 - (p_{X(t)}(0) + p_{X(t)}(1)) = 1 - \frac{(3t)^0}{0!} \cdot e^{-3t} - \frac{(3t)^1}{1!} \cdot e^{-3t} = 1 - e^{-3t} - 3t \cdot e^{-3t}$$

$$f_T(t) = \frac{d}{dt} F_T(t) = 3 \cdot e^{-3t} + 9t \cdot e^{-3t} - 3 \cdot e^{-3t} = 9t \cdot e^{-3t}$$

D.v.s.

$$f_T(t) = \begin{cases} 0 & \text{för } t \leq 0, \\ 9t \cdot e^{-3t} & \text{för } t > 0 \end{cases}$$

Uppgift 4

Här har vi en födelse-döds-process med

$$\lambda_0 = 1 \cdot \lambda \qquad \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \lambda \qquad \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \lambda \qquad \text{o.s.v.}$$

och

$$\mu_1 = \mu \qquad \mu_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \mu \qquad \mu_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \mu \qquad \text{o.s.v.}$$

Detta ger, jmf. FS sid. 10, att

$$\rho_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdots \mu_n} = (\frac{\lambda}{\mu})^n$$

vilket ger

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{\lambda}{\mu})^n = [\text{ om} \frac{\lambda}{\mu} < 1] = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\mu}{\mu - \lambda} < \infty$$

Eftersom $\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n < \infty$ för alla λ och μ och

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n \rho_n} = \frac{1}{\lambda}(1 + \sqrt{2} \cdot \frac{\mu}{\lambda} + \sqrt{3} \cdot (\frac{\mu}{\lambda})^2 + \cdots) = \infty \quad [\text{om} \frac{\lambda}{\mu} < 1]$$

så existerar alltid en gränsfördelning och den är given av

$$p_k = \frac{\rho_k}{\sum_{n=0}^{\infty} \rho_n} = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^k}{\frac{\mu}{\mu-\lambda}} = \frac{\mu-\lambda}{\mu} \cdot (\frac{\lambda}{\mu})^k = (1-\frac{\lambda}{\mu}) \cdot (\frac{\lambda}{\mu})^k = \frac{\lambda}{\mu} \cdot (\frac{\lambda}{\mu})^{k-1} \cdot (1-\frac{\lambda}{\mu})$$

Faktorn $(\frac{\lambda}{\mu})^{k-1} \cdot (1-\frac{\lambda}{\mu})$ känner vi igen från $X \in ffg(p)$ med$E(X) = \frac{1}{p}$. Här har vi $X \in ffg(1-\frac{\lambda}{\mu})$ och då är $E(X) = \frac{1}{1-\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\mu}{\mu-\lambda}$

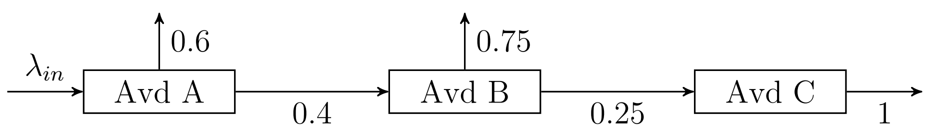
Alltså blir det eftersökta väntevärdet

$$\frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\mu}{\mu-\lambda} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$$

Således är förväntat antal kunder i systemet $\underline{\frac{\lambda}{\mu-\lambda}}$

Uppgift 5

a) Vi har ett Jacksonnätverk som beskrivs av följande graf



På avd A har vi ett M/M/2-system med betjäningsintensiteten $\mu_A = 16$, på avd B har vi ett M/M/1-system med betjäningsintensiteten $\mu_B = 16$, och på avd C har vi ett M/M/1-system med betjäningsintensiteten $\mu_C = 4$.

Vi börjar med att lösa systemet av ekvationer som ger ankomstintensiteterna till båda köerna. Systemet ges av ekvationerna(se §16.4 i F.S.)

$$\begin{aligned} \Lambda_A &= \lambda_A = \lambda_{in} = 20 \\ \Lambda_B &= 0.4\Lambda_A = 8 \\ \Lambda_C &= 0.25\Lambda_B = 2 \end{aligned}$$

Vi har nu trafikintensiteterna $\rho_A = \frac{\Lambda_A}{2\mu_A} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$, $\rho_B = \frac{\Lambda_B}{\mu_B} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$, och $\rho_C = \frac{\Lambda_C}{\mu_C} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

De tre avdelningarna kan ses som oberoende M/M/c köer. För en M/M/c kö ges förväntat antal produkter i respektive system av (se §16.1 och 16.2 i F.S.)

$$\ell = \begin{cases} l = c\rho + l_q = \cdots = \frac{\rho}{1-\rho} & \text{om } c = 1 \\ l = c\rho + l_q = \cdots = \frac{2\rho}{1-\rho^2} & \text{om } c = 2 \end{cases}$$

. Vi beräknar helt enkelt summan av förväntade antalet produkter på varje avdelning som är

$$l_A + l_B + l_C = \frac{2\rho_A}{1-\rho_A^2} + \frac{\rho_B}{1-\rho_B} + \frac{\rho_C}{1-\rho_C} = \frac{80}{39} + 1 + 1 = 4.05$$

b) Genomsnittlig tid som en defekt produkt tillbringar i verkstaden blir
$0.6w_A + 0.4 \cdot 0.75(w_A + w_B) + 0.4 \cdot 0.25(w_A + w_B + w_C) =[\ w = \frac{l}{\Lambda}\ ] = 0.6 \cdot \frac{4}{39} + 0.3(\frac{4}{39} + \frac{1}{8}) + 0.1(\frac{4}{39} + \frac{1}{8} + \frac{1}{2}) \approx 0.20$ timmar.