Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

TENTAMEN I SF1904 MARKOVPROCESSER
TISDAGEN DEN 26 MAJ 2020 KL 14.00–19.00.

Examinator: Björn-Olof Skytt tel. 790 86 49
Kursansvarig: Björn-Olof Skytt tel. 790 86 49
Tillåtna hjälpmedel: Formel- och tabellsamling i Matematisk statistik, Mathematics Handbook (Beta), hjälpreda för miniräknare, miniräknare.

Införda beteckningar skall förklaras och definieras. Resonemang och uträkningar skall vara så utförliga och väl motiverade att de är lätta att följa. Numeriska svar skall anges med minst två siffrors noggrannhet. Tentamen består av 5 uppgifter. Varje korrekt lösning ger 10 poäng. Gränsen för godkänt är preliminärt 20 poäng. Möjlighet att komplettera ges för tentander med preliminärt 18–19 poäng. Tentamen kommer att vara rättad inom tre arbetsveckor från skrivningstillfället och kommer att finnas tillgänglig på studentexpeditionen minst sju veckor efter skrivningstillfället.

Uppgift 1

En Markovprocess $X(t); t \geq 0$ med tillståndsrum $1, 2, 3, 4$ har intensitetsmatrisen

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -7 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -9 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Kedjan startar vid tidpunkt 0 i tillstånd 1.

a) Beräkna sannolikheten att processen gör sitt första hopp före tidpunkten 0.1. (3 p)

b) Motivera att en asymptotisk fördelning existerar samt beräkna denna. (4 p)

c) Beräkna sannolikheten att processens andra hopp sker till tillstånd 4. (3 p)

Uppgift 2

I en bokhylla står tre böcker A, B och C. Från början står A längst till vänster, B i mitten och C längst till höger. Vid tidpunkterna $n = 1, 2, \ldots$ tas en bok och sätts längst till vänster, så att ordningen eventuellt förändras. Vid varje tidpunkt tas, oberoende av vad som tagit vid tidigare tidpunkter, bok A med sannolikhet 0.5, bok B med sannolikhet 0.3 och bok C med sannolikhet 0.2.

Inför följande tillstånd:

E_1 A längst till vänster
E_2 A i mitten, B längst till vänster
E_3 A i mitten, C längst till vänster
E_4 A längst till höger

a) Låt X_n vara tillståndet vid tidpunkt n. Motivera att $\{X_n; n \geq 0\}$ är en markovkedja och ange övergångsmatrisen. (2 p)

b) Motivera att $\{X_n; n \geq 0\}$ är ergodisk samt beräkna den asymptotiska fördelningen. (3 p)

c) Sätt

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{om A är längst till vänster} \\ 2 & \text{om A är i mitten och} \\ 3 & \text{om A är längst till höger} \end{cases}$$

vid en "asymptotisk" tidpunkt. Beräkna $E(Y)$. (2 p)

d) Beräkna förväntad tidpunkt då A för första gången hamnar längst till höger. (3 p)

Uppgift 3

Till en servicestation anländer anrop enligt en Poissonprocess med intensitet 2 anrop per minut. Betrakta tiden fram till det 200:de anropet anländer.

Beräkna sannolikheten att det under denna tid finns minst ett anropsfritt tidsintervall längre än 3 minuter. (10 p)

Uppgift 4

En intensivvårdsavdelning har plats för 20 patienter. Patienterna anländer enligt en Poisson-process med intensiteten 7/vecka. Tiderna som patienterna vårdas på intensivvårdsavdelningen är exponential-fördelade med väntevärdet 2 veckor. Om alla platser på intensivvårdsavdelningen är upptagna slussas anländande patienter någon annan stans. Dvs. det bildas ingen kö.

Hur stor är sannolikheten att minst 16 platser är upptagna på intensivvårdsavdelningen? (10 p)

Uppgift 5

Var och en av 2 butiker fungerar som ett betjäningssystem av typen M/M/1. Till varje butik anländer kunderna enligt en Poisson-process med intensiteten $\lambda = 20$/timme. I båda butikerna är den genomsnittlga kötiden för en kund 4 minuter. Man slår nu ihop de båda butikerna till en ny butik med två expediter så att den nya butiken fungerar som ett M/M/2-system. Var och en av expediterna betjänar kunderna med samma betjäningsintensitet μ både innan och efter sammanslagningen av de båda butikerna. Kunderna anländer enligt en Poisson-process även till den nya butiken, men nu med intensiteten 2λ.

Vad blir den genomsnittliga kötiden för en kund i den nya butiken? (10 p)

Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

LÖSNINGAR TILL
TENTAMEN I SF1904 MARKOVPROCESSER
TISDAGEN DEN 26 MAJ 2020 KL 14.00–19.00

Uppgift 1

) Sätt T=tid i tillstånd 1 innan hopp. Då är $T \in$Exp(1/7). Vi söker $P(T < 0.1) = \int_{-\infty}^{0.1} f_T(t)dt = \int_0^{0.1} 7e^{-7t}dt = 1 - e^{-7\cdot 0.1} = 1 - e^{-0.7} = 0.5034$.

b) Markovprocessen är ändlig och irreducibel, $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 1$ är möjliga hopp, vilket visar att alla tillstånd kommunicerar med varandra. Processen är därför ergodisk och gränsfördelningen ges av den stationära. Vi har att lösa $\boldsymbol{\pi}\mathbf{Q} = \mathbf{0}$, d.v.s. ekvationssystemet

$$\begin{aligned} -7\pi_1 + 2\pi_3 + 2\pi_4 &= 0 \\ 3\pi_1 - 4\pi_2 + 4\pi_3 + 4\pi_4 &= 0 \\ 2\pi_1 + 2\pi_2 - 9\pi_3 &= 0 \\ 2\pi_1 + 2\pi_2 + 3\pi_3 - 6\pi_4 &= 0 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 &= 1 \end{aligned}$$

vilket har lösningen $\pi_1 = 4/35,\ \pi_2 = 17/35,\ \pi_3 = 2/15,\ \pi_4 = 4/15$.

c) Hoppkedjan har övergångsmatrisen ($\tilde{p}_{ij} = q_{ij}/q_i$)

$$\tilde{\boldsymbol{P}} = \begin{pmatrix} 0 & 3/7 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 2/9 & 4/9 & 0 & 3/9 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi söker sannolikheten att hoppkedjan är i tillstånd 4 efter två hopp vid start i tillstånd 1. Men denna sannolikhet ges av $\tilde{p}_{14}^{(2)}$ som är motsvarande element i matrisen $\tilde{\boldsymbol{P}}^2$. Detta element fås som första raden i $\tilde{\boldsymbol{P}}$ gånger fjärde kolonnen i $\tilde{\boldsymbol{P}}$, d.v.s. är $0 + \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{7} \cdot \frac{3}{9} + 0 = \frac{13}{42}$.

Uppgift 2

a) Givet att kedjan befinner sig i ett visst tillstånd ges övergångssannolikheterna av matrisen

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & 0.3 & 0 & 0.2 \\ 0.5 & 0 & 0.2 & 0.3 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Övergångarna sker oberoende av var kedjan befunnit sig tidigare och därför är kedjan en markov-kedja.

b) Kedjan är ändlig, irreducibel ty övergångarna $1 \to 2 \to 4 \to 1 \to 3 \to 1$ visar att alla tillstånd kommunicerar med varandra. Eftersom det finns diagonalelement som är skilda från 0, följer att kedjan är aperiodisk. Alltså är kedjan ergodisk. Den asymptotiska fördelningen fås ur den stationära som ges av $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$, dvs ur ekvationssystemet

$$\begin{aligned} \pi_1 &= 0.5\pi_1 + 0.5\pi_2 + 0.5\pi_3 + 0.5\pi_4 && (1) \\ \pi_2 &= 0.3\pi_1 + 0.3\pi_2 && (2) \\ \pi_3 &= 0.2\pi_1 + 0.2\pi_3 && (3) \\ \pi_4 &= 0.2\pi_2 + 0.3\pi_3 + 0.5\pi_4 && (4) \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 &= 1 && (5) \end{aligned}$$

(**??**) och (**??**) ger $\pi_1 = 0.5(\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4) = 0.5$. Ur (**??**) och (**??**) löser vi sedan omedelbart ut π_2 och π_3. Den sista ekvationen ger till sist π_4 som 1 minus summan av de övriga varför vi får lösningen

$$\pi_1 = 0.5, \ \pi_2 = \frac{3}{14}, \ \pi_3 = \frac{1}{8}, \ \pi_4 = \frac{9}{56}.$$

c) $P(Y = 1) = \pi_1 = 0.5$, $P(Y = 2) = \pi_2 + \pi_3 = \frac{19}{56}$ och $P(Y = 3) = \pi_4 = \frac{9}{56}$ ger att $E(Y) = 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot \frac{19}{56} + 3 \cdot \frac{9}{56} = \frac{93}{56}$.

d) Gör om tillstånd E_4 till ett absorberande tillstånd och låt t_i vara förväntad tid tills absorption i E_4 vid start i tillstånd E_i. Vi får ekvationssystemet

$$\begin{aligned} t_1 &= 1 + 0.5t_1 + 0.3t_2 + 0.2t_3 \\ t_2 &= 1 + 0.5t_1 + 0.3t_2 \\ t_3 &= 1 + 0.5t_1 + 0.2t_3 \end{aligned}$$

Lös ut t_2 och t_3 ur de två sista likheterna och sätt in i den första varvid erhålls det sökta $t_1 = 10\frac{4}{9}$.

Uppgift 3

Låt T_i, $i = 1, 2, \ldots, 200$, beskriva tiden mellan anrop i och $i-1$ där $T_0 = 0$. Då är T_i oberoende och exponentialfördelade med intensitet $\lambda = 2$ per minut. Alltså är för $t > 0$

$$P(T_i > t) = \int_t^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\, dx = \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

och

$$\begin{aligned} P(\max(T_1, \ldots, T_{200}) \le t) &= P(T_1 \le t, \ldots, T_{200} \le t) = P(T_1 \le t) \cdots P(T_{200} \le t) \\ &= (1 - \mathrm{e}^{-\lambda t})^{200}. \end{aligned}$$

Således

$$P(\max(T_1, \ldots, T_{200}) \ge 3) = 1 - (1 - \mathrm{e}^{-2 \cdot 3})^{200} = \underline{0.391}.$$

Uppgift 4

Antalet patienter på intensivvårdsavdelningen beskrivs av en födelse-döds-process med

$$\lambda_k = \lambda = 7 \quad \text{och} \quad \mu_k = k\mu = k \cdot \frac{1}{2}.$$

Detta ger, jmf. FS sid. 10, att

$$\rho_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{k-1}}{\mu \cdot 2\mu \cdots k\mu} = \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} = \frac{(14)^k}{k!}$$

Eftersom vi har en ändlig irreducibel markovprocess så har vi en stationär fördelning $\boldsymbol{\pi}$, och den är given av

$$\pi_j = \frac{\rho_j}{\sum_{i=0}^{20} \rho_i} = \frac{\frac{(\lambda/\mu)^j}{j!}}{\sum_{i=0}^{20} \frac{(\lambda/\mu)^i)}{i!}} = \frac{\frac{14^j}{j!}}{\sum_{i=0}^{20} \frac{14^i}{i!}} = \frac{\frac{14^j}{j!} \cdot e^{-14}}{\sum_{i=0}^{20} \frac{14^i}{i!} \cdot e^{-14}}$$

Här känner vi igen sannolikhetsfunktionen för $X \in Po(\mu)$, där $\mu = 14$.

Således blir sökt sannolikhet $\dfrac{P(X \ge 16)}{P(X \le 20)} = \dfrac{P(X \le 20) - P(X \le 15)}{P(X \le 20)} =$ [se tab 5 i FS] $=$

$$= \frac{0.95209 - 0.66936}{0.95209} = 0.2969$$

<u>Svar: 29.7%</u>

Uppgift 5

Vi söker den genomsnittliga tiden w_k i kön när vi har ett M/M/2-system.

$$\text{Enl §16.1 gäller att} \quad w_k = \frac{l_q}{\lambda} \quad \text{där (enl §16.2)} \quad l_q = \frac{2\rho^3}{1-\rho^2} \quad \text{där} \quad \rho = \frac{\lambda}{c\mu}$$

.

För ett M/M/2-system är $c = 2$ och här i vårt fall blir $\lambda = 2 \cdot 20$. i M/M/2-systemet
Vilket värde μ har får vi ta reda på från M/M/1-systemen.

$$\text{För ett M/M/1-sysem gäller att} \quad l_q = \frac{\rho^2}{1-\rho} \quad \text{och därmed} \quad w_k = \frac{\rho^2}{(1-\rho)\cdot\lambda}$$

Eftersom w_k är 4 min enligt uppgiften får vi ekvationen

$$\frac{1}{15} = \frac{\rho^2}{(1-\rho)\cdot 20} \quad \text{D.v.s.} \quad \frac{4}{3} = \frac{\rho^2}{(1-\rho)}$$

$$\text{Lösningen av andragradsekvationen ger att} \quad \rho = \frac{2}{3}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \Rightarrow \mu = 30$$

$$\text{Nu går vi tillbaka till M/M/2-systemet och sätter in } \rho = \frac{2}{3} \text{ och } \mu = 30 \text{ i}$$

$$w_q = \frac{2\rho^3}{(1-\rho^2)\cdot\lambda} \text{ och får med } \rho = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{2\cdot 20}{2\cdot 30} = \frac{2}{3}$$

$$w_q = \frac{\frac{16}{27}}{(1-\frac{4}{9})\cdot 40} = \frac{16\cdot 9}{27\cdot 5\cdot 40} = \frac{4}{150} \text{ timmar} = \frac{4\cdot 60}{150} = 1.6 \text{ minuter}$$

<u>Svar: 1.6 minuter</u>