Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

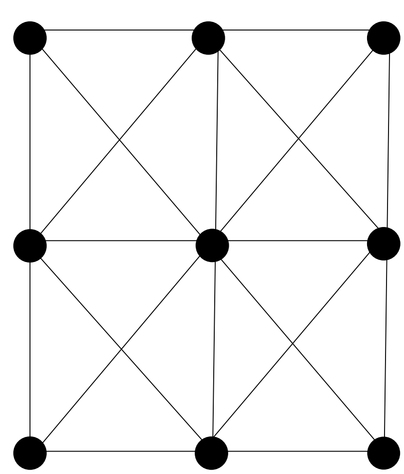
TENTAMEN I SF1904 MARKOVPROCESSER
FREDAGEN DEN 14 AUGUSTI 2020 KL 08.00–13.00.

Examinator: Björn-Olof Skytt tel. 790 86 49
Kursansvarig: Björn-Olof Skytt tel. 790 86 49
Tillåtna hjälpmedel: Institutionens Formel- och tabellsamling i Matematisk statistik (även e-version tillåten), Mathematics Handbook (Beta),institutionens hjälpreda för miniräknare, miniräknare.

Införda beteckningar skall förklaras och definieras. Resonemang och uträkningar skall vara så utförliga och väl motiverade att de är lätta att följa. Numeriska svar skall anges med minst två siffrors noggrannhet. Tentamen består av 5 uppgifter. Varje korrekt lösning ger 10 poäng. Gränsen för godkänt är preliminärt 20 poäng. Möjlighet att komplettera ges för tentander med preliminärt 18–19 poäng. Tentamen kommer att vara rättad inom tre arbetsveckor från skrivningstillfället och kommer att finnas tillgänglig på studentexpeditionen minst sju veckor efter skrivningstillfället.

Uppgift 1

n partikel placeras ut i mittpunkten i nedanstående figur. Den utför sedan en slumpvandring så att vid varje steg var och en av de angränsande punkterna (till höger, vänster, uppåt, nedåt eller diagonalt) väljes med lika stor sannolikhet. Detta betyder att partikeln aldrig stannar kvar i en punkt.



a) Bestäm sannolikheten att partikeln befinner sig i mitten efter lång tid och motivera också existensen av en asymptotisk fördelning. (5 p)

b) Beräkna förväntat antal steg innan partikeln åter är i mitten. (5 p)

Ledning till a) och b): Försök att ha så få tillstånd som möjligt i din modell.

Uppgift 2

Ett system har den egenskapen att det efter en fullständig service fungerar en exponentialfördelad tid med väntevärde $1/\lambda_1$. En sådan fullständig service tar en exponentialfördelad tid (med väntevärde $1/\mu_1$) att genomföra. Man kan kan också genomföra en partiell service, enbart syftande till att få systemet att fungera så snabbt som möjligt. En sådan partiell service tar en exponentialfördelad tid med väntevärde $1/\mu_2$ och systemet fungerar sedan en exponentialfördelad tid (väntevärde $1/\lambda_2$). Fullständig service är givetvis dyrare än partiell service och därför utförs en fullständig service bara varannan gång systemfel uppträder. Beräkna sannolikheten att systemet fungerar efter lång tid uttryckt i parametrarna $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$. (10 p)

Uppgift 3

I ett elektriskt system beskrivs de kraftiga störningarna av en Poissonprocess $\{N(t);\ t \geq 0\}$ med $E[N(t)] = ct$.

Beräkna $E[N(2) \mid N(5) = 7]$. (10 p)

På grund av uppgiftens karaktär ställs stora krav på den formella behandlingen.

Uppgift 4

Kunder anländer till en frisersalong med två verksamma frisörer enligt en Poissonprocess med intensitet 6 kunder/timme. Eftersom kunderna är ganska stressade så går de in i frisersalongen med sannolikhet ett bara om det finns minst en ledig frisör. Annars ansluter de sig med sannolikhet 0.5 om det finns två kunder, med sannolikhet 0.25 om det finns tre kunder och aldrig om det finns fler än tre kunder i salongen. Antag att tiden det tar att klippa en kund är exponentialfördelad med väntevärde 20 minuter. Beräkna väntevärdet av antal kunder i frisersalongen vid stationära förhållanden. (10 p)

Uppgift 5

En person köper varje dag en tidning på väg hem från jobbet. Den kiosk där inköpen görs kan uppfattas som ett $M/M/1$-system i jämvikt med ankomstintensitet $\lambda = 1$ och betjäningsintensitet $\mu = 2$. (Tidsenhet: minuter.) Under ett år gör personen 200 inköp i denna kiosk.

Beräkna sannolikheten för att personen under ett år ägnar mer tid än två timmar åt att *köa* för att köpa tidningen. Lämpliga och välmotiverade approximationer är tillåtna. (10 p)

Avd. Matematisk statistik

KTH Matematik

LÖSNINGAR TILL TENTAMEN I SF1904 MARKOVPROCESSER FREDAGEN DEN 14 AUGUSTI 2020 KL 08.00–13.00

Uppgift 1

v symmetri-skäl behövs bara 3 tillstånd: 1=mitten, 2=kant, 3=hörn. Vi får då övergångsmatrisen

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/5 & 2/5 & 2/5 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$$

och vi startar kedjan med $\boldsymbol{p}^{(0)} = (1, 0, 0)$.

a) Kedjan är ändlig och irreducibel ty $1 \to 2 \to 3 \to 1$. Den är även aperiodisk eftersom $p_{22} > 0$. Alltså är kedjan ergodisk, dvs efter lång tid har den den (unika) stationära fördelningen. Alternativt kan man motivera ergodiciteten med att kolumn nr 2 är strikt större än 0. Den efterfrågade sannolikheten är alltså π_2 där $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ uppfyller ekvationssystemet $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} P$ och $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$. Vi får alltså ekvationssystemet

$$\begin{cases} \pi_1 &= \frac{1}{5}\pi_2 + \frac{1}{3}\pi_3 \\ \pi_2 &= \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{2}{5}\pi_2 + \frac{2}{3}\pi_3 \\ \pi_3 &= \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{2}{5}\pi_2 \\ 1 &= \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \end{cases}$$

Om man tar 2·ekvation 1-ekvation 2 erhålls $\pi_1 = 2\pi_2/5$ vilket insatt i ekvation 1 ger $\pi_3 = 3\pi_3/5$. Sätts dessa resultat in i “normeringsekvationen” erhålls $\pi_2 = 5/10$ och vi får $\boldsymbol{\pi} = (2/10, 5/10, 3/10)$ och den sökta sannolikheten är alltså 2/10=0.2. b) Vi gör tillståndet 1 (dvs mitten) absorberande

(utom när vi startar i mitten). Med beteckningar enligt formelsamlingen låter vi t_i vara förväntad tid tills absorbtion i mitten givet start i tillstånd i, i=2,3 och t_1 förväntad tid från mitten tills vi återvänder till mitten. Vi får då

$$\begin{cases} t_1 &= 1 + \frac{1}{2}t_2 + \frac{1}{2}t_3 \\ t_2 &= 1 + \frac{2}{5}t_2 + \frac{2}{5}t_3 \\ t_3 &= 1 + \frac{2}{3}t_2 \end{cases}$$

Om vi sätter in sista ekvationen i ekvation 2 erhålls $t_2 = 4.2$ som ger $t_3 = 3.8$ som slutligen ger $t_1 = 5$.

Uppgift 2

i inför tillstånden E_1=funktion efter fullständig service, E_2=funktion efter partiell service, E_3=fullständig service samt E_4=partiell service. Om $X(t)$=tillståndet vid tiden t, $t \geq 0$, så inser man att $(X(t);\, t \geq 0)$ är en Markovkedja i kontinuerlig tid med övergångsintensitetsmatris

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & 0 \\ \mu_1 & 0 & -\mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 & -\mu_2 \end{pmatrix}$$

Kedjan är uppenbarligen irreducibel (löper ju successivt igenom alla tillstånd) och den är därför ergodisk eftersom den är ändlig. Den asymptotiska fördelningen $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$ finner vi genom att lösa ekvationssystemet $\boldsymbol{\pi}\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ tillsammans med normeringsvillkoret, dvs ekvationssystemet

$$\begin{cases} 0 = & -\lambda_1\pi_1 + \mu_1\pi_3 \\ 0 = & -\lambda_2\pi_2 + \mu_2\pi_4 \\ 0 = & \lambda_2\pi_2 - \mu_1\pi_3 \\ 0 = & \lambda_1\pi_1 - \mu_2\pi_4 \\ 1 = & \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 \end{cases}$$

Man erhåller lätt

$$\pi_4 = \frac{\lambda_1}{\mu_2}\pi_1,\ \ \pi_2 = \frac{\mu_2}{\lambda_2}\pi_4 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\pi_1 \text{ samt } \pi_3 = \frac{\lambda_1}{\mu_1}\pi_1$$

som i normeringsekvationen ger

$$\pi_1\left(1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_1}{\mu_1} + \frac{\lambda_1}{\mu_2}\right) = 1$$

Systemet fungerar om det är i tillstånd E_1 eller E_2 vilket ger att sannolikheten för systemfunktion efter lång tid är

$$\pi_1 + \pi_2 = \frac{1 + \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}}{1 + \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} + \dfrac{\lambda_1}{\mu_1} + \dfrac{\lambda_1}{\mu_2}} = \underline{\frac{1/\lambda_1 + 1/\lambda_2}{1/\lambda_1 + 1/\lambda_2 + 1/\mu_1 + 1/\mu_2}}$$

Uppgift 3

i har

$$E[N(2) \mid N(5) = 7] = \sum_n n \cdot P(N(2) = n \mid N(5) = 7).$$

Nu gäller

$$P(N(2) = n \mid N(5) = 7) = \frac{P(\{N(2) = n\} \cap \{N(5) = 7\})}{P(N(5) = 7)}$$

$$= \frac{P(\{N(2) = n\} \cap \{N(5) - N(2) = 7 - n\})}{P(N(5) = 7)} = \frac{\frac{(2c)^n}{n!}e^{-2c} \cdot \frac{(3c)^{(7-n)}}{(7-n)!}e^{-3c}}{\frac{(5c)^7}{7!}e^{-5c}} =$$

$$= \frac{\frac{2^n}{n!} \cdot \frac{3^{(7-n)}}{(7-n)!}}{\frac{5^7}{7!}} = \frac{7!}{n!(7-n)!} \left(\frac{2}{5}\right)^n \left(\frac{3}{5}\right)^{7-n} = \binom{7}{n} \left(\frac{2}{5}\right)^n \left(\frac{3}{5}\right)^{7-n}.$$

Detta innebär att $N(2) \mid N(5) = 7$ är Bin$(7, \frac{2}{5})$-fördelad, vilket ger $\underline{E[N(2) \mid N(5) = 7] = \frac{14}{5}}$.

Uppgift 4

Låt X_t vara antalet kunder i systemet vid tid t. $\{X_t, t \geq 0\}$ är en födelse-dödsprocess med födelse- och dödsintensiteter

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda, \lambda_2 = 0.5\lambda, \lambda_3 = 0.25\lambda \text{ och } \lambda_i = 0 \text{ övriga } i$$
$$\mu_1 = \mu, \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 2\mu$$

där λ=6 och μ=3 h^{-1}. Sätt på sedvanligt sätt $\rho_n = \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n}$, $n = 1, 2, 3, 4$ ($\rho_0 = 1$). Vi erhåller $\rho_1 = 2, \rho_2 = 2, \rho_3 = 1$ och $\rho_4 = 0.25$. Summan av dessa blir $\sum_{n=0}^4 \rho_n = 6.25$. Den stationära fördelningen ges därför av

$$\pi_0 = \frac{4}{25}, \pi_1 = \frac{8}{25}, \pi_0 = \frac{8}{25}, \pi_3 = \frac{4}{25}, \pi_4 = \frac{1}{25}$$

och väntevärdet av

$$\sum_{n=0}^{4} n \cdot \pi_n = 0 \cdot \frac{4}{25} + 1 \cdot \frac{8}{25} + 2 \cdot \frac{8}{25} + 3 \cdot \frac{4}{25} + 4 \cdot \frac{1}{25} = \underline{1.6}$$

Uppgift 5

Vi har $\mu = 2$ och $\rho = \lambda/\mu = 1/2$. Låt Q_k vara tiden i kön dag k. Enligt formelsamlingen gäller att

$$G_q(\tau) = P(Q_k \leq \tau) = 1 - \rho e^{-\mu(1-\rho)\tau} = 1 - 0.5e^{-\tau}, \quad \tau > 0.$$

Observera att Q_k har en blandad fördelning. Vi får

$$E(Q_k) = 0.5 \int_0^\infty \tau e^{-\tau}\, d\tau = 0.5$$

och

$$E(Q_k^2) = 0.5 \int_0^\infty \tau^2 e^{-\tau}\, d\tau = 0.5 \cdot 2 = 1$$

vilket ger $V(Q_k) = 1 - 0.25 = 0.75$.
Sätt $X = \sum_{k=1}^{200} Q_k$. X är då den tid under ett år som personen ägnar åt att köa för att köpa sin tidning.
Enligt centrala gränsvärdessatsen är X approximativt $N\left(200 \cdot \frac{1}{2}, \sqrt{200 \cdot \frac{3}{4}}\right) = N(100, \sqrt{150})$-fördelad. Detta ger

$$P(X > 120) = P\left(\frac{X - 100}{\sqrt{150}} > \frac{120 - 100}{\sqrt{150}}\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{120 - 100}{\sqrt{150}}\right)$$
$$= 1 - \Phi(1.63) = 1 - 0.94845 = \underline{0.05}.$$