

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig lösning och motivering.
Alla införda beteckningar som inte är standard skall definieras.

1. Den stokastiska vektorn $(X \ Y)$ har den simultana täthetsfunktionen

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{\pi(1+x^2+y^2)^2} \quad (x,y) \in \mathbf{R}^2.$$

Bestäm täthetsfunktionen för $T = X^2 + Y^2$. (Det kan vara lämpligt att utnyttja polära koordinater.) (10p.)

2. Den stokastiska variabeln X är exponentialfördelad med väntevärdet $\frac{1}{\lambda}$.

a) Bestäm $E[X^n]$ för $n = 0, 1, \dots$. (Det kan vara lämpligt att använda momentgenererande funktionen.) (5p.)

b) Variabeln N är oberoende av X och har fördelningen $\text{Po}(\mu)$, där $\mu < \lambda$.
Beräkna $E[X^N]$ (5p.)

3. Den stokastiska vektorn $(X \ Y \ Z)'$ är normalfördelad med väntevärdet $(0 \ 0 \ 0)'$ och kovariansmatris

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Bestäm fördelningen för X betingat att $Y = 0$ och $Z = 1$. (10p.)

4. Den stokastiska variabeln X har den diskreta sannolikhetsfördelningen $P(X = k) = (1 - \lambda p)^k \lambda p$, $k = 0, 1, \dots$. Låt $Y = pX$. Visa att Y konvergerar i fördelning då $p \rightarrow 0$, och bestäm denna fördelning. (Ledning: gränsfördelningen är en kontinuerlig fördelning.) (10p.)

5. Betrakta en Poisson-process $X(t)$ med intensiteten λ . Bestäm $E[X(1) \mid X(3) = 2]$. (10p.)

1. Låt D vara ett intervall, och $I_D(t)$ indikator-funktionen för detta intervall. Då har vi

$$\begin{aligned} P(T \in D) &= E[I_D(X^2 + Y^2)] = \frac{1}{\pi} \iint I_D(x^2 + y^2) \frac{dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\infty I_D(r^2) \frac{r dr}{(1 + r^2)^2} \right) d\theta \\ &= \int_0^\infty I_D(r^2) \frac{2r dr}{(1 + r^2)^2} = \int_0^\infty I_D(t) \frac{dt}{(1 + t)^2} \\ &= \int_D h(t) \frac{dt}{(1 + t)^2} \end{aligned}$$

Alltså är täthetsfunktionen för T $\boxed{f_T(t) = h(t) \frac{1}{(1 + t)^2}}$ ($h(t)$ är heaviside-funktionen, dvs. funktionen som är $= 1$ på positiva axeln och $= 0$ på negativa.)

- 2a. Den momentgenererande funktionen för en $\text{Exp}(\frac{1}{\lambda})$ -fördelad variabel är

$$\psi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} = \frac{1}{1 - t/\lambda}, \quad t < \lambda$$

Maclaurinutveckling ger

$$\psi(t) = \sum_0^\infty \left(\frac{t}{\lambda}\right)^n$$

vilket visar att $E[X^n] = \psi^{(n)}(0) = \frac{n!}{\lambda^n}$. (Det går naturligtvis bra också att derivera $\psi(t)$ n gånger i stället för att Maclaurinutveckla.)

$$\boxed{\text{Svar: } E[X^n] = \frac{n!}{\lambda^n}.$$

2b. $E[X^N] = E[E[X^N \mid N]] = E[\frac{N!}{\lambda^N}] = \sum_0^\infty \frac{n!}{\lambda^n} \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu} = e^{-\mu} \sum_0^\infty \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^n =$
 $\boxed{e^{-\mu} \frac{\lambda}{\lambda - \mu}}.$

3. Vi bestämmer konstanterna a och b så att variabeln U som definieras genom

$$X = aY + bZ + U \quad (2.1)$$

blir okorrelerad med Y och Z . Vi får

$$\text{Cov}(Y, X) = a \text{Cov}(Y, Y) + b \text{Cov}(Y, Z) + \text{Cov}(Y, U)$$

$$\text{Cov}(Z, X) = a \text{Cov}(Z, Y) + b \text{Cov}(Z, Z) + \text{Cov}(Z, U)$$

som ger

$$2 = 2a + 0b + \text{Cov}(Y, U)$$

$$1 = 0a + 3b + \text{Cov}(Z, U)$$

dvs. $\text{Cov}(Y, U) = \text{Cov}(Z, U) = 0$ om $a = 1, b = \frac{1}{3}$. Därmed blir U normalfördelad (linjärkombination) och *oberoende* av Y och Z . Vi kan nu beräkna $E[U]$ och $\text{Var}(U)$ ur (2.1):

$$0 = E[X] + \frac{1}{3}E[Y] + E[U] = E[U]$$

$$3 = \text{Var}(Y) + \frac{1}{9} \text{Var}(Z) + \frac{2}{3} \text{Cov}(Y, Z) + \text{Var}(U) = \frac{7}{3} + \text{Var}(U)$$

Alltså $U \in N(0, \frac{2}{3})$ ($\frac{2}{3}$ är *variansen*.) Betingat $Y = 0, Z = 1$ gäller

$$X = 1 \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 + U$$

(observera att U är oberoende av Y och Z). Alltså, betingat $Y = 0, Z = 1$ har X fördelningen $N(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

4. Vi bestämmer först den momentgenererande funktionen för Y (det går naturligtvis lika bra med karakteristiska funktionen):

$$\psi_Y(t) = \sum_0^\infty e^{tpk} (1 - \lambda p)^k \lambda p = \frac{\lambda p}{1 - e^{tp}(1 - \lambda p)}, \quad t < \lambda$$

Vi får nu, med L'Hôpitals regel:

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow 0} \psi_Y(t) &= \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\lambda p}{1 - e^{tp}(1 - \lambda p)} = \frac{0}{0} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\lambda}{-te^{tp}(1 - \lambda p) + e^{tp}\lambda} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - t} \end{aligned}$$

Enligt kontinuitetssatsen konvergerar Y i fördelning mot fördelningen vars momentgenererande funktion är $\frac{\lambda}{\lambda - t}$, dvs. mot $\text{Exp}(\frac{1}{\lambda})$.

5. En lösning är att först visa att fördelningen för $X(1) \mid (X(3) = 2)$ är $\text{Bin}(2, \frac{1}{3})$, och därefter få fram väntevärdet. Det ger den enklaste kalkylen. Om man inte går via den betingade fördelningen ser kalkylen ut så här:

Det gäller att

$$E[X(1) \mid X(3) = 2] = \frac{E[X(1) I_{(X(3)=2)}]}{P(X(3) = 2)}.$$

För nämnaren gäller, eftersom $X(3) \in \text{Po}(3\lambda)$:

$$P(X(3) = 2) = \frac{(3\lambda)^2}{2!} e^{-3\lambda} = 4.5\lambda^2 e^{-3\lambda}$$

För täljaren gäller att $X(1) I_{(X(3)=2)}$ bara kan anta värdena 0, 1 och 2, motsvarande händelserna $\{X(1) = 0 \cap X(3) - X(1) = 2\}$, $\{X(1) = 1 \cap X(3) - X(1) = 1\}$, $\{X(1) = 2 \cap X(3) - X(1) = 0\}$. Nu är $X(1) \in \text{Po}(\lambda)$ och $X(3) - X(1) \in \text{Po}(2\lambda)$ och dessa s.v. är oberoende. Alltså

$$\begin{aligned} E[X(1) I_{(X(3)=2)}] &= 0 \cdot e^{-\lambda} \cdot \frac{(2\lambda)^2}{2!} e^{-2\lambda} + 1 \cdot \lambda e^{-\lambda} \cdot 2\lambda e^{-2\lambda} \\ &\quad + 2 \cdot \frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} \cdot e^{-2\lambda} = 3\lambda^2 e^{-3\lambda}. \end{aligned}$$

Alltså $E[X(1) \mid X(3) = 2] = (3\lambda^2 e^{-3\lambda}) / (4.5\lambda^2 e^{-3\lambda}) \boxed{= \frac{2}{3}.}$