KTH Matematik
Harald Lang

Tentamensskrivning, 21/8-2007, kl 8.00–13.00.
5B1541 Sannolikhetsteori och Linjära Modeller.
Hjälpmedel: miniräknare, formelsamling enl. Appendix 2 i Guts bok (bifogas)

Samtliga behandlade uppgifter skall förses med utförlig lösning och motivering. Alla införda beteckningar som inte är standard skall definieras.

---

1. Det stokastiska variablerna X och Y är oberoende och har båda fördelningen Exp(1). Bestäm täthetsfunktionen för $Z = \frac{X}{Y}$. (10p.)

2a. Den stokastiska variabeln X är normalfördelad N(0,1). Bestäm $E[X \mid X > a]$. (5p.)

b. De stokastiska variablerna X och Y är normalfördelade $N(0, \sigma_x^2)$ respektive $N(\mu, \sigma_y^2)$ ($\sigma_\bullet^2$ är variansen) och oberoende. Bestäm fördelningen för X betingat $X + Y = a$. (5p.)

3. Den stokastiska variabeln Y är konstruerad på följande sätt: först observerar vi ett utfall x av X som är uniformt fördelad $U(0, \theta)$; därefter observerar vi ett utfall y av Y som är Poissionfördelad $Po(x)$. Bestäm (det obetingade) väntevärdet $E(Y^2)$. (10p.)

4. De stokastiska variablerna $X_n, n = 2, 3, \ldots$ är binomialfördelade: $X_n \in \text{Bin}(n, \frac{n+1}{n^2})$. Bevisa att X_n konvergerar i fördelning då $n \to \infty$, och bestäm gränsfördelningen. (10p.)

5. Den stokastiska variabeln Y är konstruerad på följande sätt: först observerar vi ett utfall x av X som är uniformt fördelad $U(0, 1)$; därefter observerar vi ett utfall y av Y som är binomialfördelad $\text{Bin}(n, x)$.

a. Bestäm sannolikhetsgenererande funktionen för (den obetingade variabeln) Y. (5p.)

b. Bestäm (den obetingade) sannolikhetsfördelningen för Y. (5p.)

(Alltför) kortfattade lösningar

1.
$$\begin{aligned} P(Z \in D) &= \int_0^\infty \int_0^\infty I_D\Big(\frac{x}{y}\Big) e^{-x-y}\,dx\,dy = \int_0^\infty \int_0^\infty I_D(z) y\, e^{-y(z+1)}\,dz\,dy \\ &= \int_0^\infty I_D(z) \frac{1}{(1+z)^2}\,dz = \int_D \frac{h(z)}{(1+z)^2}\,dz \end{aligned}$$

där $h(z)$ är Heaviside-funktionen. Alltså är täthehsfunktionen $f(z) = \dfrac{h(z)}{(1+z)^2}$,

2a.
$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X \mid X > a] &= \frac{\mathrm{E}[X\, I_{X>a}]}{P(X > a)} = \frac{1}{(1-\Phi(a))\sqrt{2\pi}} \int_a^\infty x\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{2}a^2}}{(1-\Phi(a))\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

2b. Definiera variabeln Z genom sambandet $X = \beta(X+Y) + Z$ där $\beta = \dfrac{\sigma_x^2}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$. Då blir $\mathrm{Cov}(X+Y, Z) = 0$. Enligt satser är Z normalfördelad och oberoende av $X+Y$. Vi får $\mathrm{E}(Z) = -\dfrac{\sigma_x^2\mu}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$ och $\mathrm{Var}(Z) = \dfrac{\sigma_x^2\sigma_y^2}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}$.
Betingat $X+Y = a$ gäller alltså att $X = \beta a + Z$, så
$Z \in N\Big(a - \dfrac{\sigma_x^2\mu}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}, \dfrac{\sigma_x^2\sigma_y^2}{\sigma_x^2+\sigma_y^2}\Big)$.

3. Om $Y \in \mathrm{Po}(x)$, så $\mathrm{E}(Y^2) = \mathrm{Var}(Y) + \mathrm{E}(Y)^2 = x + x^2$. Alltså är $\mathrm{E}(Y^2 \mid X) = X + X^2$. Vi får
$$\mathrm{E}(Y^2) = \mathrm{E}(X + X^2) = \frac{1}{\theta}\int_0^\theta x + x^2\,dx = \frac{\theta}{2} + \frac{\theta^2}{3}$$

4. Sannolikhetsgenererande funktionen för X_n är
$$g_n(t) = \big(1 + \frac{1+n}{n^2}(t-1)\big)^n$$
Alltså
$$\begin{aligned} \ln(g(t) &= n \ln\big(1 + \frac{1+n}{n^2}(t-1)\big) = n\Big(\frac{1+n}{n^2}(t-1) + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2})\Big) \\ &\to t-1 \quad \text{då} \quad n \to \infty. \end{aligned}$$
Härav följer $g_n(t) \to e^{t-1}$ som är sgf för Po(1). Svar: konvergerar i fördelning mot Po(1).

5a. För givet $x, 0 \le x \le 1$, gäller $g_{Y|X=x}(t) = \big(1 + x(t-1)\big)^n$. Alltså $g_Y(t) = \mathrm{E}\big[\big(1+x(t-1)\big)^n\big] = \int_0^1 \big(1 + x(t-1)\big)^n\,dx = \frac{1}{(n+1)}\,\frac{1-t^{n+1}}{1-t}$.

5b. $g_Y(t) = \frac{1}{(n+1)}(1 + t + \cdots + t^n)$, vilket visar att Y är likformigt fördelad på talen $\{0, 1, \cdots, n\}$.