

En ALM modell
med minimering av CVaR
och krav på tillväxt

av

Tobias Anglevik

Abstract

In this paper we develop a basic Asset-Liability Management model where assets match the liabilities. Rates of returns are randomly generated with Monte Carlo simulation. These rates of return describe possible events in the future. The portfolio is minimized with subject to constraints on growth in a linear program. As a risk measure we use Conditional Value-at-Risk. The model is adapted to the Swedish Church pension fund and is formulated after their needs and demands. The result is presented in a portfolio allocation to meet these demands.

Sammanfattning

Jag har utvecklat en Asset Liability Management modell där tillgångarna matchas mot skulderna. Avkastningar på tillgångarna slumpas fram med Monte Carlo simulering. Dessa avkastningar beskriver möjliga händelser i framtiden. Portföljen minimeras i ett linjärprogram med avseende på risken där man samtidigt har önskemål om tillväxt. Som riskmått använder jag Conditional Value at Risk. Modellen är anpassad till Svenska Kyrkans pensionskassa och har formulerats efter deras behov och krav. Resultaten presenteras i form av hur portföljen ska allokeras för att nå upp till dessa krav.

Acknowledgements

I would like to thank my supervisor Ulf Brännlund, at the institution of Mathematics KTH, for always giving me the guidance when needed. Ulf's remarks and help has been invaluable. I would also like to thank professor Boualem Djehiche, at the institution of Mathematical Statistics, KTH, for making it possible to complete my report.

1 INLEDNING	5
1.1 BAKGRUND	5
1.2 SYFTE	5
2 INTRODUKTION	6
2.1 LOTTNING	6
2.2 OPTIMERING	6
2.3 VALBARA PARAMETRAR	9
2.4 TIDSERIER OCH RESTRIKTIONER	10
3 MODELLEN	11
3.1 CONDITIONAL VALUE AT RISK, CVAR	11
3.2 MODELLBESKRIVNING	12
3.3 RESULTAT	15
3.4 PROGRAMSTRUKTUR	19
4 SLUMPGENERERING	21
4.1 ALLMÄNT	21
4.2 MONTE CARLO SIMULERING	22
5 OPTIMERINGSVILLKOR	23
5.1 JÄMVIKTS SAMBAND	23
5.2 BASVILLKOR	24
5.3 MINIMERING AV RISK	25
5.4 INVESTERINGSMÅL	25
5.5 ÖVRIGA BIVILLKOR	26
6 FORMALISERING	28
6.1 DEFINITIONER	28
6.2 PROBLEMUPPSTÄLLNING	30
7 RESULTAT	31
7.1 TILLGÅNGAR VARIERAR, ÖVRIGA PARAMETRAR ÄR FIXERADE	31
7.2 ANTALET SLUMPNINGAR VARIERAR, ÖVRIGA PARAMETRAR ÄR FIXERADE	34
7.3 ANTALET TIDSPERIODER VARIERAR, ÖVRIGA PARAMETRAR ÄR FIXERADE	37
7.4 MARGINALEN VARIERAR, ÖVRIGA PARAMETRAR ÄR FIXERADE	40
7.5 RISKEN VARIERAR, ÖVRIGA PARAMETRAR ÄR FIXERADE	43
7.6 RÄNTAN PÅ SKULDEN VARIERAR, ÖVRIGA PARAMETRAR ÄR FIXERADE	46
8 DISKUSSION	49
REFERENSER	51
APPENDIX	53
A.1 MATLAB PROGRAMMERINGSKOD	53
A.2 GLPK PROGRAMMERINGSKOD	56

1 Inledning

1.1 Bakgrund

En del pensionskassor placerar idag en stor del av tillgångarna i statsobligationer pga. solvensregler som uppkommit enligt EU-tjänstepensionsdirektiv¹. De efterfrågar alternativa lösningar där tillgångarna matchas mot skulderna och där de samtidigt önskar att öka avkastningen och fortfarande ha en acceptabel nivå på risk. Efter att ha varit i kontakt med olika pensionskassor har behovet av en ALM-analys uppmärksammats.

För att undersöka vad som efterfrågades i en ALM-analys gjordes en intervju med Anders Granberg, administrativ chef, på Svenska Kyrkans pensionskassa. Av intervjun framgick att de vill se alternativa lösningar för hur de kan matcha deras tillgångar mot deras skulder. Det framgick vilka värdepapper som modellen ska ta hänsyn till och som får förekomma i deras portfölj. Han påpekade att det primära målet är att minimera risken och sekundärt vill man öka avkastningen om de anser att möjligheten finns. Han poängterade att de är intresserade av ett verktyg som kan ta fram ett beslutsunderlag. Vidare betonade han intresset av att iterativt prova olika alternativ och hitta lämplig risknivå på egen hand. Slutsatser efter intervjun kunde vi tillsammans sammanfatta i följande sju punkter och som utgör grunden för denna ALM-modell:

- Minimera risken och samtidigt om möjligt öka avkastningen².
- Välja hur lång tidshorisont samt hur noggrann analysen ska vara.
- Anpassa analysen till olika skulder, ränta på skulder och tillgångar.
- Möjlighet att användaren själv får bestäma nivå på risk.
- Möjlighet att iterativt pröva olika scenarion så att Svenska kyrkans pensionskassa själva kan få olika beslutsunderlag och dra egna slutsatser.
- Vilka värdepapper som ska ingå i analysen.
- Restriktion av fastigheter så att de maximalt upptar 10% av portföljen.

1.2 Syfte

Med intervjun som utgångspunkt har jag skapat en ALM-modell som i möjligaste mån tillgodoser Svenska Kyrkans önskemål. Syftet med modellen är att besvara Svenska Kyrkans önskemål och att presentera resultat på ett pedagogiskt sätt.

¹ Se referenslista, Finansinspektionen, artiklar från DN och DI.

² I linjärprogrammering kan man antingen minimera risken eller maximera avkastningen. Parametrarna står i motsatsförhållande till varandra.

2 Introduktion

En användare får tilldela relevanta värden på parametrar beroende på förutsättningar och mål. Modellen är uppbyggd sådan att olika utfall slumpas fram vid olika tidpunkter och får beskriva den framtida händelseutvecklingen. Med detta som grund optimeras scenarierna i ett linjärprogram med avseende på målfunktion och bivillkor och en optimalt allokerad portfölj presenteras vid varje tidpunkt. Optimeringsresultaten utgör ett beslutsunderlag för huruvida användaren vill öka tillväxtmålet och på så sätt tvingas att ta mer risk.

2.1 Lottning

Varje värdepapper i portföljen antas vara normalfördelad och utifrån historisk data slumpas I st. resultat i T st. perioder. Slumpning sker genom Monte Carlo simulering, där de slumpade utfallen av portföljens värdepapper har en kovariansmatris som överrensstämmer med kovariansmatrisen som är skattad från det historiska datat. De slumpade utfallen kan tolkas som slumpvägar och beskriver möjliga händelser fram till och med tiden T .

2.2 Optimering

Jag har utgått ifrån en optimeringsmodell som är formulerad som ett linjärprogram. Optimeringsmodellen är framtagen av Erik Bogentoft, H. Edwin Romeijn och Stanislav Uryasev [2] och i modellen minimeras premien för en pensionsfond. Jag har ändrat målfunktion, bivillkor, parametrar och variabler.

För att på ett enkelt sett ge en introduktion av linjärprogrammet ställer jag upp en en-dimensionell allmän modell som inte beror av tiden. Den allmänna modellen speglar hur tillväxtmålet implementeras i modellen samtidigt som man vill minimera risken vilket är centralt i studien. Jag introducerar följande variabler och parametrar:

x_n = Tillgång n (variabel).

r_n^i = Ränta på investering n i utfall i (stokastisk variabel).

X^0 = Tillgångarna vid start (parameter, bestäms av användaren).

L = Storlek på skulden (parameter, bestäms av användaren)¹.

M = Marginalen² vid tiden T (parameter, bestäms av användaren).

Vid varje tidsperiod t , strävar man efter att tillgångarna är större än eller lika med skulden, dvs vid en tidsperiod gäller

$$\sum_{n=1}^N [(1 + r_n)x_n] \geq L, \quad \text{med tillräckligt stor sannolikhet.} \quad (2.2.1)$$

¹ Alternativt kan skulden ses som en stokastisk variabel. Eftersom modellen är en förenkling ses här skulden som konstant med fast reglerad ränta.

² Marginalen vid tiden $t = 0$ betecknas M^0 .

Detta går dock inte att hantera i ett optimeringsproblem pga. att bivillkoret inte är konvext. Om (2.2.1) inte håller får man en förlust. Som ett mått på denna förlust införs en förlustfunktion $f(x; r, L)$ sådan att

$$f(x; r, L) = L - \sum_{n=1}^N (1 + r_n)x_n. \quad (2.2.2)$$

Då kan ekvation (2.2.1) skrivas som

$$f(x; r, L) \leq 0, \quad \text{med tillräckligt stor sannolikhet.} \quad (2.2.3)$$

Vi undersöker en tidsperiod. Låt $p(r, L)$ beteckna den flerdimensionella täthetsfunktionen för de stokastiska variablerna r och L . Fördelningsfunktionen för den stokastiska variabeln $f(x; r, L)$ kan skrivas som

$\Phi(x, \alpha) = P(f(x; r, L) \leq \alpha)$, vilket då kan uttryckas som

$$\Phi(x, \alpha) = \int_{f(x; r, L) \leq \alpha} d(P(r, L)), \quad (2.2.4)$$

vilket per definition är sannolikheten att förlustfunktionen $f(x; r, L)$ inte överstiger värdet α . Låt β beteckna en sannolikhet. Då kan (2.2.4) formuleras som

$$\begin{array}{ll} \min_{x, \alpha} & \alpha \\ \text{då} & \Phi(x, \alpha) \geq \beta, \end{array} \quad (2.2.5)$$

β -CVaR är väntevärdet av de utfall som är större än β -VaR. Vi definierar följande funktion:

$$F_\beta(x, \alpha) = \alpha + \frac{1}{(1 - \beta)} \int_{\mathfrak{R}} (f(x; r, L) - \alpha)^+ P(d(r, L)). \quad (2.2.6)$$

Ekvation (2.2.6) är konvex och per definition också CVaR (se Palmquist, Uruasev & Krokhmal 1999 [14]).

Funktionen $F_\beta(x, \alpha)$ kan realiserars från fördelningsfunktionen P genom I st. olika händelser. Då kan (2.2.6) approximeras till:

$$F_\beta(x, \alpha) = \alpha + I^{-1}(1 - \beta)^{-1} \sum [f(x; r, L) - \alpha] \leq w_i. \quad (2.2.7)$$

Då extra variabeln z^i införs får vi:

$$\alpha + I^{-1}(1 - \beta)^{-1} \sum_{i=1}^I z^i \leq w, \quad (2.2.8)$$

$$L - \sum_{n=1}^N [1 + r_n^i] x_n - \alpha \leq z^i, \quad z^i \geq 0, \quad i = 1, \dots, I. \quad (2.2.9)$$

Ekvationerna (2.2.8) och (2.2.9) utgör basen i linjärprogrammet. Genom att minimera CVaR eller w minimerar vi också risken.

Det sekundära målet är att öka tillväxten på eget kapital. Kravet på att öka tillväxten samtidigt som man vill minimera risken, står i motsatsförhållande till varandra. För att lösa detta problem har jag låtit införa en parameter där man talar om vilket mål vid tiden $t = 0$ man har på eget kapital vid tiden T . I rapporten betecknas det egna kapitalet för marginal, M . Sambandet mellan skuld, Tillgångar och marginal vid tiden $t = 0$ ges då av:

$$X^0 = L + M^0, \quad (2.2.10)$$

och vid tiden T gäller:

$$\sum_{n=1}^N x_{n,t} \geq L + M, \quad \text{med tillräckligt stor sannolikhet.} \quad (2.2.11)$$

Vid en tidsperiod måste h.l. i ekvation (2.2.11) vara uppfyllt och vi har därför

$$\sum_{n=1}^N x_n \geq L + M, \quad \text{med tillräckligt stor sannolikhet.} \quad (2.2.12)$$

Vidare ska värdet på investeringen vid start vara lika med tillgångarna dvs. vi ställer upp följande samband:

$$\sum_{n=1}^N x_{n,0} = X^0. \quad (2.2.13)$$

Portföljens värdepapper måste vara större än, eller lika med noll. Vi kan inte ha ett negativt antal värdepapper i portföljen. Detta leder till följande ekvation,

$$x_n \geq 0, \quad n = 1, \dots, N. \quad (2.2.14)$$

Med ekvationerna (2.2.8), (2.2.9) och (2.2.12)-(2.2.14) kan jag ställa upp följande allmänna linjärprogram vid en tidsperiod:

Min w ,

$$\begin{aligned} \text{då} \quad \alpha + I^{-1}(1 - \beta)^{-1} \sum_{i=1}^I z^i &\leq w, \\ L - \sum_{n=1}^N [1 + r_n^i] x_n - \alpha &\leq z^i, \quad i = 1, \dots, I, \\ \sum_{n=1}^N x_n &\geq L + M, \\ z^i &\geq 0, \quad i = 1, \dots, I, \\ \sum_{n=1}^N x_{n,0} &= X^0, \\ x_n &\geq 0, \quad n = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

2.3 Valbara parametrar

För att leva upp till Svenska Kyrkans krav har jag låtit väsentliga parametrar varit valbara för att ge dem en möjlighet att iterativt pröva olika möjligheter på egen hand. Vidare vill jag att modellen ska kunna anpassas till flera olika pensionskassor med olika förutsättningar. Med intervjun som utgångspunkt har följande anpassningar gjorts.

Då antalet slumpvägar påverkar noggrannheten i modellen, fler slumpvägar ger en bättre approximation av verkligheten, på bekostnad av datorkraft, blir valet individuellt. Med samma argument är tidshorizonten, dvs. hur långt fram i tiden skattning sker, också ett individuellt val och som har hög påverkan på prestandan.

I målfunktionen minimeras risken och den påverkas av önskemål på tillväxt. Marginalen mellan tillgångar och skulder varje tidsperiod är en avgörande parameter. Modellen ska fungera för olika personer/företag med olika mängd pengar, skulder, ränta på skulder och krav på tillväxt. En annan avgörande parameter är valet av percentil (VaR eller Value-at-Risk) som beror på ändamål och är därför en ändringsbar parameter. Totalt finns sju parametrarna som användaren kan justera efter egna förutsättningar och krav:

1. Tidshorizonten, T .
2. Antalet slumpvägar, I .
3. Tillgångar vid tiden $t = 0$.
4. Skulden vid tiden $t = 0$.
5. Den fasta räntan på skulden.
6. Krav på marginal vid tiden $t = T$.
7. Val av percentil, VaR.

2.4 Tidserier och restriktioner

De värdepapper som ingår i portföljen är:

- 10 åriga svenska nollkupongsobligationer
- 10 åriga europeiska obligationer
- svenskt aktieindex, OMXS 30
- internationellt aktieindex, MSCI World
- svenska fastigheter, rikstäckande.

Ett bivillkor är formulerat så att fastigheter maximalt kan uppta 10% av portföljen varje tidsperiod.

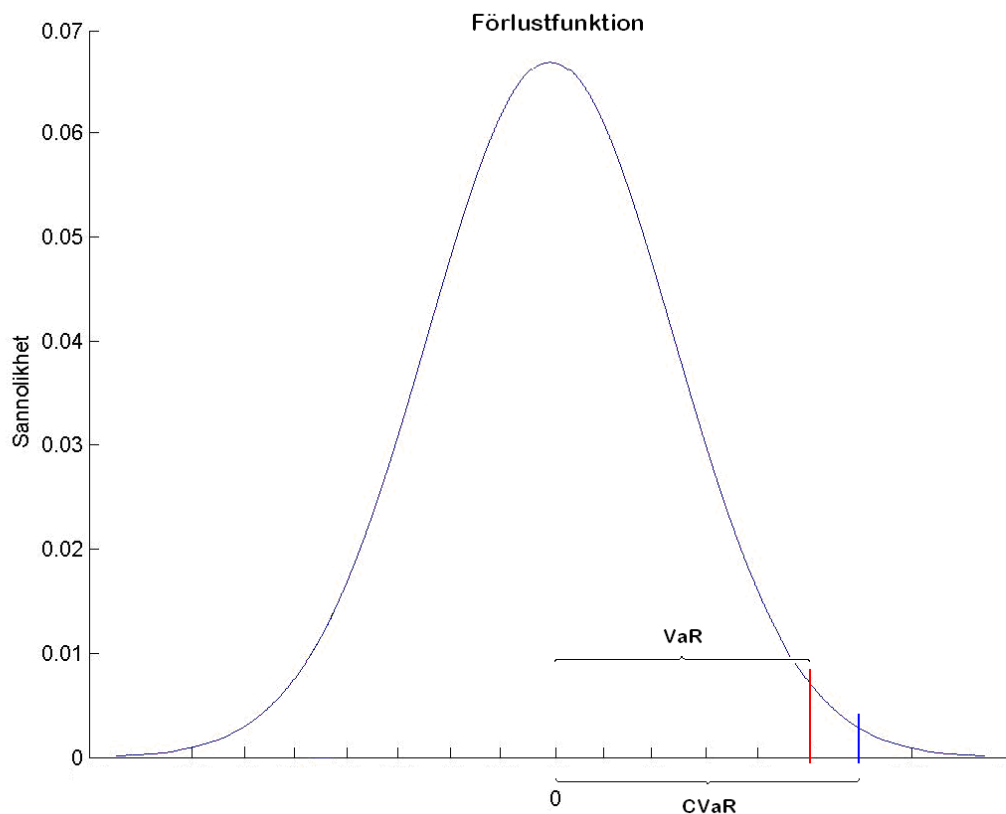
3 Modellen

Detta kapitel syftar till att ge en överkådlig förståelse för hur modellen är uppbyggd och fungerar. En viss upprepning kan därför förekomma.

3.1 Conditional Value at Risk, CVaR

Som tidigare berörts minimeras risken i målfunktionen. I ALM-modellen mäts risken m.h.a. CVaR, Conditional Value-at-Risk eller Tail VaR. För att detta ska vara möjligt måste man först ange vilken percentil man ska ha som utgångspunkt vid optimering av CVaR. Denna percentil är mer känd som VaR eller Value-at-Risk.

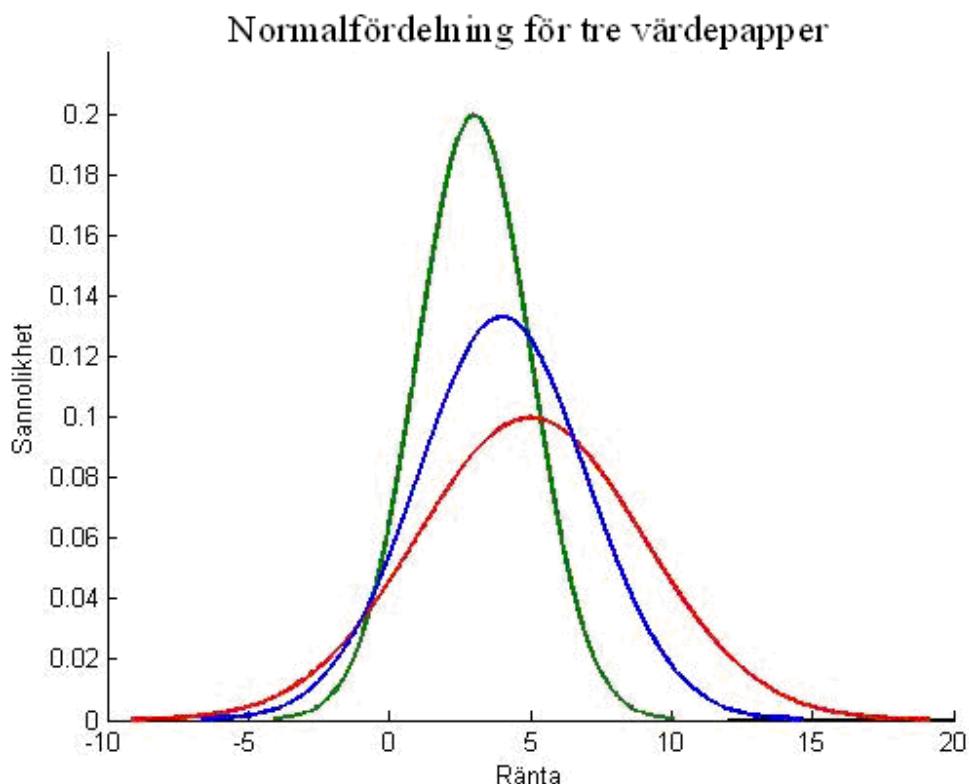
CVaR talar om hur stora förlusterna är i snitt givet att den är större än en percentil, dvs. VaR. Man får på detta sätt även information om hur svansen är fördelad för de sämsta utfallen till skillnad från det vanligare riskmåttet VaR. Man kan med ord beskriva CVaR som väntevärdet av de händelser som inträffar betingat att förlustfunktionen är större än VaR.



Figur 3.1: Det blå fältet utgör avståndet från mitten (Förlusten = 0) till riskgränsen, dvs. avståndet är CVaR-värdet. Det röda fältet utgör avståndet för VaR. Till skillnad från det vanligare riskmåttet VaR får man nu även information om var tyngdpunkten på svansen är belägen givet VaR. I modellen strävar man efter att minimera CVaR.

3.2 Modellbeskrivning

För att pedagogiskt beskriva modellen används några exempel. Värden och figurer är påhittade och ska i första hand ge en uppfattning om hur modellen fungerar. Varje exempel antas bestå av tre olika värdepapper, fem olika utfall ($I=5$) vid fem tidsperioder ($T=5$). I en verklig simulering skulle det behövas betydligt fler scenarion. Varje värdepapper utgör med sin historik en tidserie. Tidserierna antas vara normalfördelade och tillhörande ränteutveckling antas vara log-normalfördelad.

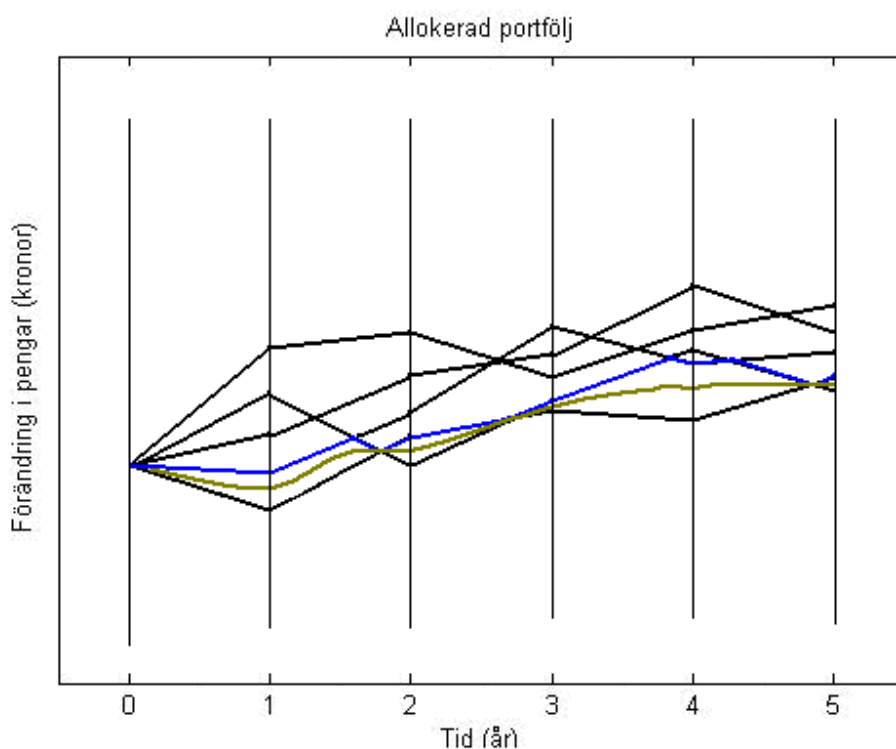


Figur 3.2.1: Normalfördelning för tre värdepapper med varierande volatilitet och förväntad avkastning. Grön kurva är minst volatil med lägst förväntad avkastning. Den röda kurvan har högst volatilitet och förväntad avkastning.

Instrumenten kommer att ingå i portföljen i olika stor utsträckning beroende på vilka tillgångar och skulder man har samt vilken marginal man har som mål vid tiden T . Har man mycket tillgångar i förhållande till skulden och samtidigt ställer låga mål på marginalen kommer man sannolikt att i huvudsak investera i de värdepapper som uppvisar låg volatilitet (grön kurva i figur 3.2.1). Ställer man istället höga mål på marginalen tvingas man att ta mer risk och därför kommer sannolikt värdepapper som uppvisar hög volatilitet att dominera portföljen (röd kurva i figur 3.2.1).

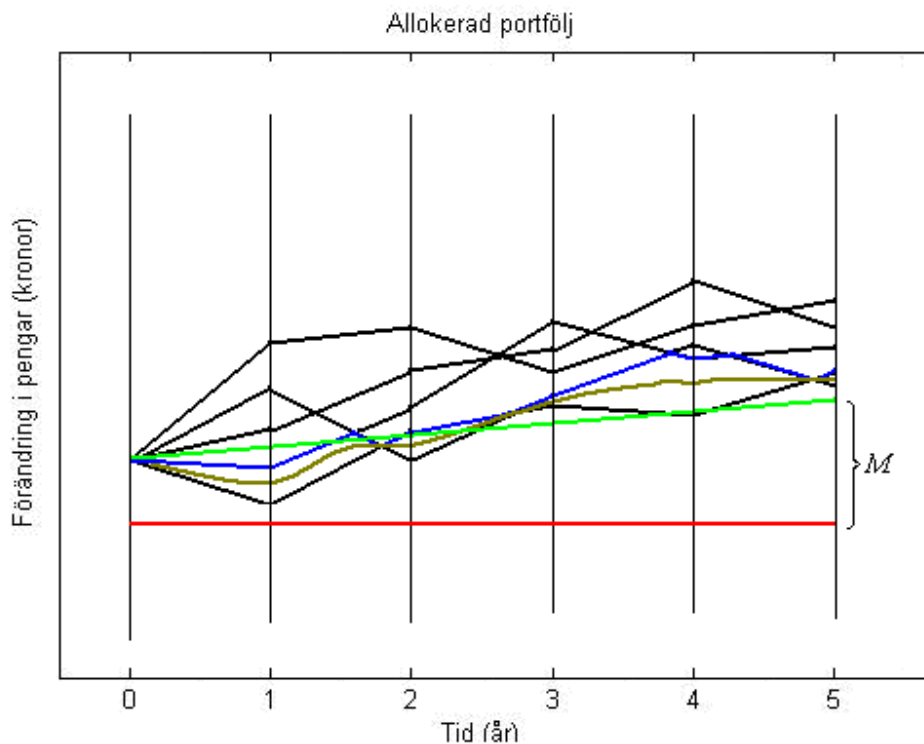
Det finns flera olika sätt att lösa stokastiska problem, man kan använda olika simuleringstekniker eller stokastisk programmering där man använder sig av binomialträd. Binomialträd ger på ett tidigt stadium alltför stora och komplexa lösningar som kräver extrem datorkapacitet. I modellen används Monte Carlo simulering där de lottade utfallen är korrelerade. Man gör förenklingar av verkligheten för att få hanterbar datamängd.

I figur (3.2.2) illustreras hur simuleringen går till. Där visas alla möjliga scenarion för värden av en optimalt allokerad portfölj enligt modellen som grundar sig på de parametrar användaren har valt. I exemplet ser man fem olika scenarion under fem olika tidpunkter. Varje utfall är en oberoende slumpning som utgår ifrån en tidigare händelse. Simuleringen bygger på detta sätt upp ett händelseförlopp av framtida scenarion som bygger på varandra. Man får på detta sätt I st. olika "slumpvägar". Den blåa linjen representerar portföljen som ligger på vald percentilen VaR. Som framgår av bilden är VaR-portföljen det fjärde sämsta scenariot vid samtliga tidpunkter, vilket innebär att man har valt 80 % VaR. Den beigea kurvan representerar CVaR-värdet på portföljen. CVaR-kurvan är konvex och lämpar sig för linjärprogrammering.



Figur 3.2.2: Skiss över möjliga slumpvägar av en optimalt allokerad portfölj enligt modellen med givna ingångsvärden. De svarta linjerna utgör möjliga utfall för den allokerade portföljen varje tidpunkt. I skissen finns fem olika slumpvägar ($I=5$) vid varje tidsperiod och fem tidsperioder ($T=5$). Den blå linjen motsvaras av VaR-värdet av portföljen och utgör den fjärde sämsta slumpvägen (80%) och den beige linjen beskriver resultatet av optimeringen, dvs. CVaR-värdet av portföljen.

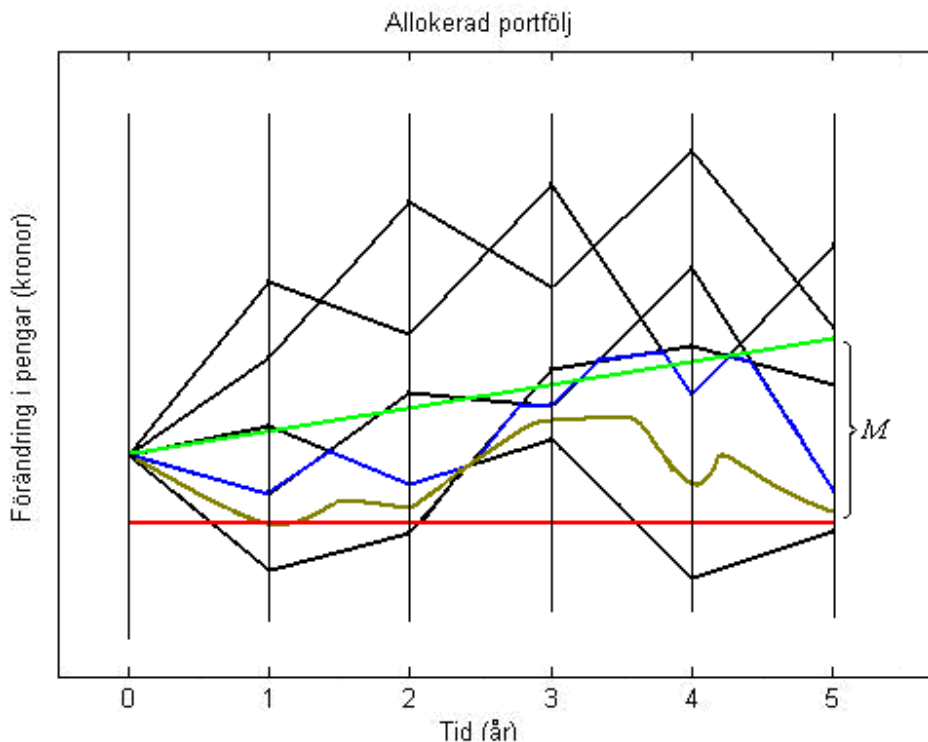
I figur (3.2.3) har man lagt till två linjer, den gröna linjen beskriver investeringens målsättning som styrs av vilken marginal M , användaren har valt som mål. Den röda linjen beskriver skuldens utveckling. Som framgår av bilden ligger samtliga utfall i alla perioder över skulden. Enligt modellen kommer man att klara av sina åtaganden med 100% sannolikhet med givna parametrar.



Figur 3.2.3: I skissen visas den allokerade portföljens möjliga utfall samt skuldens utveckling och investeringens mål. I skissen ovan visas marginalen M , vid tiden $t=5$. Samtliga scenarion är ovanför skulden vilket innebär att man kommer att kunna betala tillbaka sina skulder varje tidsperiod med 100% säkerhet enligt modellen.

Av figur (3.2.4) har användaren gjort en ny simulering. Personen i fråga har höjt målet för marginalen vilket återges i den brantare gröna linjen. De olika scenarierna är mer spridda och varierar kraftigare. Modellen tvingas att investera i mer volatila värdepapper för att leva upp till målet på marginalen. Enligt modellen är man nu inte längre säker på att kunna betala skulderna. Man har å andra sidan större möjlighet att öka kapitalet.

Som framgick av inledningen vill jag skapa en modell som minimerar risken och samtidigt tar hänsyn till tillväxtmål. Vidare framgick att modellen skulle skapas sådan att individen själv skulle ges möjlighet att iterativt pröva olika möjligheter och med detta som utgångspunkt fatta egna beslut. Figurerna syftar till att spegla hanteringen av detta.



Figur 3.2.4: I skissen visas den allokerade portföljens möjliga utfall samt skuldens utveckling och investeringens mål. I skissen ovan har man en större marginal M vid tiden $t=5$ i jämförelse med figur 3.1.3. Det finns nu en risk att man inte kan betala tillbaka sina skulder.

3.3 Resultat

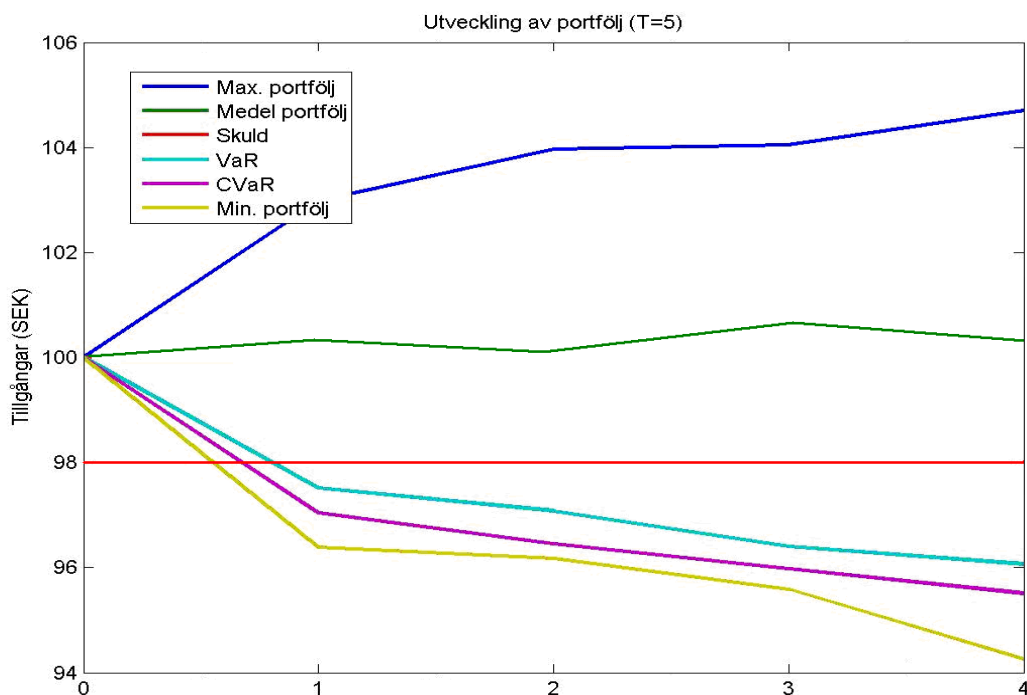
Vid varje tidsperiod optimeras en ny portfölj och modellen genererar på detta sätt en förvaltningsstrategi som sträcker sig från tiden noll till och med tiden $T-1$ ¹. Jag förutsätter dock att man endast är intresserad av ett beslutsunderlag vid tiden noll som sträcker sig fram t.o.m. tiden T och inte att strategin åtföljs. Jag förutsätter således att användaren kontinuerligt optimerar fram nya resultat eftersom förutsättningarna hela tiden kommer att ändras med tiden.

Som resultat presenteras tre grafer, en normalfördelningskurva över utfallen vid tiden noll, en graf som presenterar portföljallokeringarna vid tiden noll till och med tiden $T-1$, samt en graf som presenterar relevanta portföljutvecklingar från tiden noll t.o.m. tiden $T-1$.

Som framgått av modellbeskrivningen allokeras portföljerna lika för alla scenarion trots att de skiljer sig åt. Variationerna fångas upp i en variabel som ses som kontanter. Dessa kontanter, eller skillnader mellan slumpvägar, utnyttjas bl.a. till att räkna ut en snittportfölj, en maximal portfölj och en minimal portfölj vid varje tidsperiod. Detta syftar till att ge användaren ytterligare information om spridning av den allokerade portföljens olika värden. Dessa referenspunkter presenteras tillsammans med VaR, CVaR och skuld, i en graf efter att optimeringen är genomförd. Exempel på detta visas i figur (3.3.1).

¹ Varje portföljallokering grundar sig på en simulering till framförvarande tidsperiod. Väljer man en tidshorisont på T st. tidsperioder kommer den sista portföljallokeringen att vara vid tiden $T-1$.

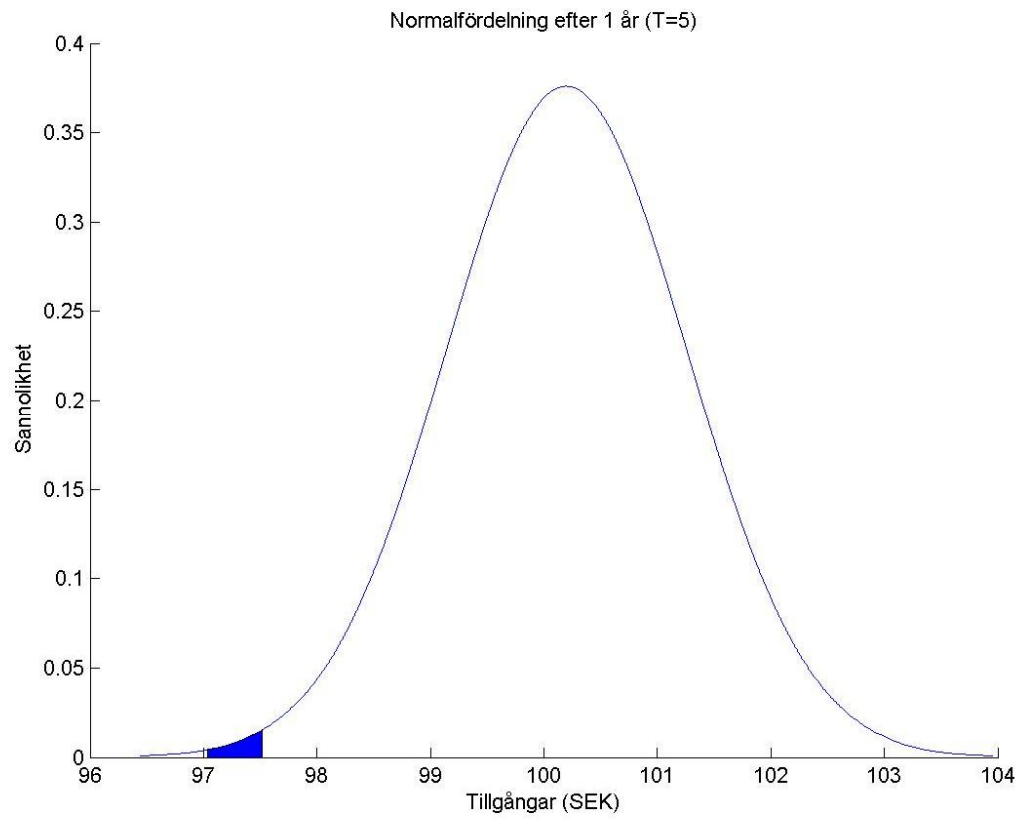
Ur figuren kan man urskilja spannet mellan översta blå kurvan (maximal portfölj) och den undre beige kurvan (minimal portfölj) som tillsammans utgör gränser för möjliga utfall för portföljallokeringarna under given tidshorisont. Den gröna kurvan anger utvecklingen för medelvärdet av alla slumpvägar vid varje tidsperiod (medelportföljen). Den röda vågräta kurvan anger skuldens utveckling och de övriga två färgerna anger utvecklingen av portföljerna som är motsvarade av riskmåten VaR och CVaR. Om någon kurva ligger nedanför den röda kurvan betyder det att det finns en risk att man inte kan betala tillbaka skulden enligt modellen. Hur stor denna risk är beror på hur många kurvor som ligger nedanför den röda kurvan samt hur ofta eller under hur lång tid det pågår.



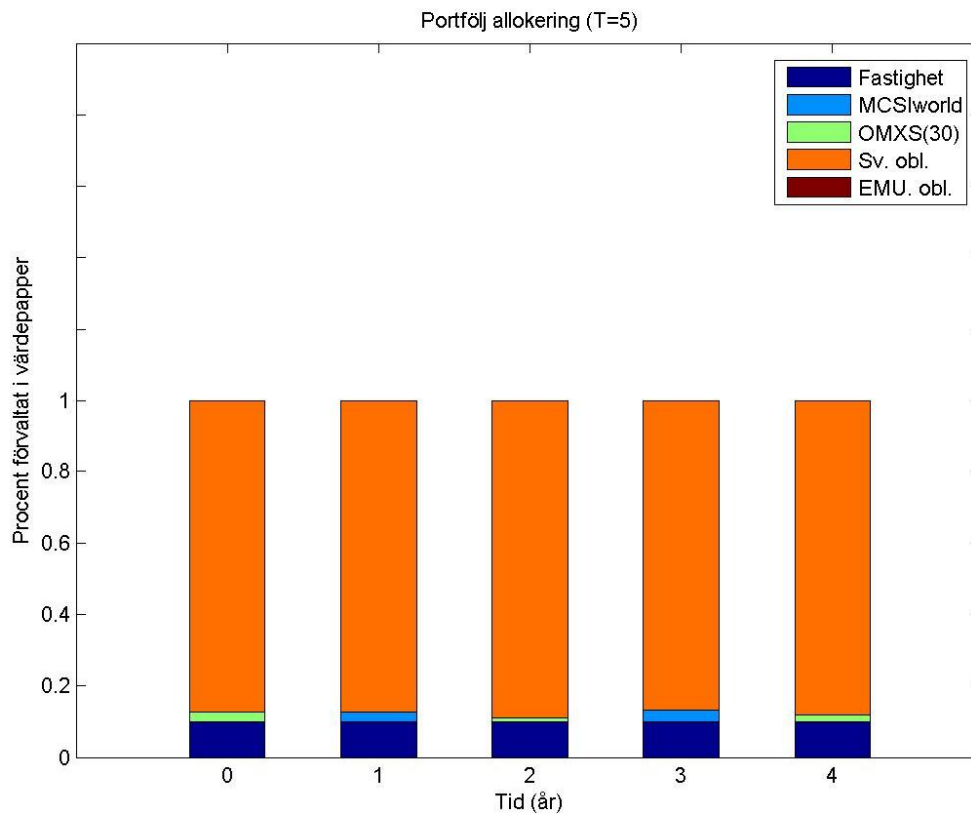
Figur 3.3.1: Beskriver utveckling av en allokerad portfölj i modellen. Av figuren framgår att det finns risk att man inte kan betala tillbaka skulden. T.ex. så ligger vald percentil under skulden, således även CVaR-portföljen och den minimala portföljen, medan den genomsnittliga portföljen ligger ovanför.

I figur 3.3.2 presenteras samtliga utfall av den allokerade portföljen i en normalfördelningskurva med VaR-värdet och CVaR-värdet på portföljen, vid tiden noll¹. De blå fältet anger avståndet mellan dessa två storheter, den högra kanten representerar portföljens VaR-värde och den vänstra kanten portföljens CVaR-värde. Man strävar efter att minimera CVaR och ett litet avstånd mellan VaR och CVaR vittnar om en låg spridning av de värsta scenarierna som faller utanför vald percentil.

¹ Portföljallokeringen vid tiden $t = 0$ är skattad på utfall t.o.m $t = 1$.



Figur 3.3.2: Utfallen av portföljallokeringen vid tiden noll med tillhörande riskmått i en normalfördelningskurva. Det blå fältet anger avståndet mellan dessa två storheter, den högra kanten representerar portföljens VaR-värde och den vänstra kanten portföljens CVaR-värde.



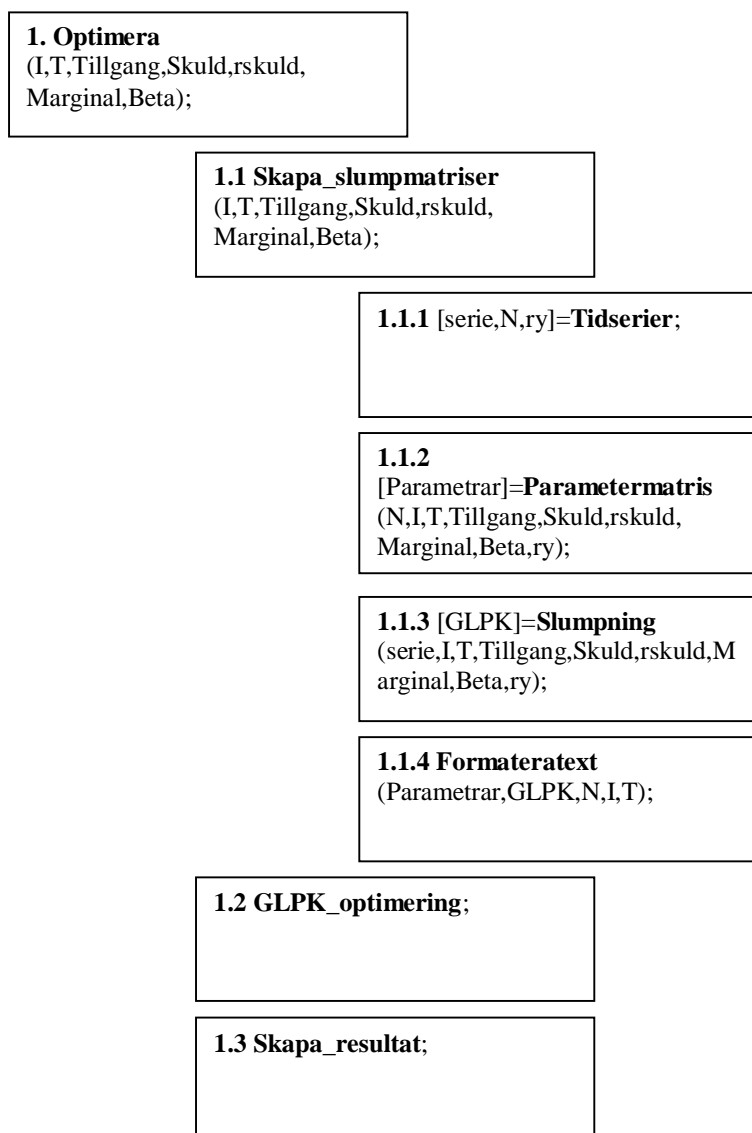
Figur 3.3.3 : Här visas hur portföljen ska allokeras varje tidsperiod fram till och med år 4 (T-1).

I figur 3.3.3 visas hur den optimala portföljen enligt modellen ska allokeras i procent av ingående värdepapper varje tidsperiod. Den sista skattningen ges vid tiden $t = T-1$ då allokeringen beror av händelseutvecklingen fram till och med $t = T$ ($T = 5$ i exemplet).

Av figuren framgår att nästan 90% av portföljen ska bestå av svenska obligationer, 10 % av fastigheter och en liten mängd av aktier som är ungefär lika vid varje tidsperiod.

3.4 Programstruktur

Modellen är programmerad i Matlab och GLPK (Gnu Linear Programming Kit). Strukturen nedan syftar till att ge en överblick över vilka metoder som är skapade och hur programmet är uppbyggt¹.



Figur 3.4: Modellens programmeringsstruktur.

¹ För mer information se Appendix

1 Optimera:

Programmet anropas i Matlab och resultaten presenteras beroende på val av parametrarna, I, T, Tillgångar, Skuld, Ränta på skuld, Marginal och Value-at-Risk.

1.1 Skapa slumpmatriser:

Består av fyra underprogram där lottning sker genom Monte Carlo Simulering givet historisk data över tidserierna. Beräkningsunderlaget sammanställs i ett format som programmet GLPK kan läsa.

1.2 GLPK optimering:

Slumpresultaten beräknas i programmet GLPK och risken, CVaR, minimeras genom linjärprogrammering.

1.3 Skapa resultat:

Relevanta resultat presenteras pedagogiskt¹.

¹ Se resultat.

4 Slumpgenerering

4.1 Allmänt

Kursen för varje värdepapper antas vara normalfördelad. Två variabler införs och tiden förutsätts vara diskret med tidsteget Δt .

$$\begin{aligned} S_{n,t} &= \text{kursen för värdepapper } n, \text{ vid tiden } t. \\ r_{n,t+\Delta t} &= \text{Avkastningen för värdepapper } n, \text{ från tiden } t \text{ fram till tiden } t + \Delta t. \end{aligned}$$

En kursutveckling kan då skrivas enligt:

$$S_{n,t+\Delta t} = (1 + r_{n,t+\Delta t})S_{n,t} = R_{n,t+\Delta t}S_{n,t}. \quad (4.1.1)$$

Låt Z_n vara en stokastisk variabel sådan att $Z_n \in N(0,1)$ och antag att den stokastiska variabeln $Y_n \in N(\mu_n, \sigma_n)$. Då är

$$Y_n = \log(R_{n,t+\Delta t}) = \log(S_{n,t+\Delta t}) - \log(S_{n,t}) = \log\left(\frac{S_{n,t+\Delta t}}{S_{n,t}}\right) = \mu_n \Delta t + \sigma_n Z_n \sqrt{\Delta t}. \quad (4.1.2)$$

Antag vidare att $\text{Cov}(Y_i, Y_j) = \sigma_{ij}$. Då kan ekvation (4.1.2) skrivas på vektorform enligt:

$$Y = \log(R) \in N(\mu, \sigma) \Rightarrow \left\{ R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ R_N \end{bmatrix}, \mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \mu_N \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \cdot & \cdot & \sigma_{1,N} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} & \cdot & \cdot & \sigma_{2,N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_{N,1} & \sigma_{N,2} & \cdot & \cdot & \sigma_{N,N} \end{bmatrix} \right\}.$$

Eftersom C är positivt semidefinit kan C Choleskyfaktoriseras enligt $C = RR^T$. Dvs. R^T kan erhållas genom ekvationerna (se Gentle 1998 [8]):

$$R_{i,j} = (\sigma_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} R_{i,k}^2)^{1/2}, \quad (4.1.3)$$

$$R_{i,j} = \frac{1}{R_{i,i}} (\sigma_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} R_{i,k} R_{j,k})^{1/2}, \quad j = i + 1, \quad i + 2, \dots, N. \quad (4.1.4)$$

Där R och R^T LU-faktoriseras enligt:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \cdot & \cdot & \sigma_{1,N} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} & \cdot & \cdot & \sigma_{2,N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_{N,1} & \sigma_{N,2} & \cdot & \cdot & \sigma_{N,N} \end{bmatrix}}_{=C} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{1,1} & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ R_{2,1} & R_{2,2} & 0 & \cdot & 0 \\ R_{3,1} & R_{3,2} & R_{3,3} & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ R_{N,1} & R_{N,2} & R_{N,3} & \cdot & R_{N,N} \end{bmatrix}}_{=R} \underbrace{\begin{bmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} & R_{1,3} & \cdot & R_{1,N} \\ 0 & R_{2,2} & R_{2,3} & \cdot & R_{2,N} \\ 0 & 0 & R_{3,3} & \cdot & R_{3,N} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & R_{N,N} \end{bmatrix}}_{=R^T}$$

Enligt ekvation (4.1.2) - (4.1.4) gäller:

$$Y = \mu\Delta t + R^T Z\sqrt{\Delta t}, Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_N \end{bmatrix}, Z_n \in N(0,1), \quad n = 1, \dots, N \quad (4.1.5)$$

4.2 Monte Carlo simulering

De scenarion som beskriver kursutvecklingen i framtiden skapas i programmet Matlab. Kovariansmatrisen C och medelvärdet på avkastningarna μ är beräknade på historisk data. Kommandot: "chol" genererar en Cholesky-uppdelning sådan att $R^T = chol(C)$. Vid varje tidsperiod t och vid varje scenario i, lottas N st. avkastningar Z_N till en vektor Z från en standardiserad normalfördelning sådan att:

$$Y_t^i = \log(R)_t^i = (\mu\Delta t + R^T Z\sqrt{\Delta t})_t^i. \quad (4.2.1)$$

Enligt ekvation (4.1.1) och (4.2.1) gäller:

$$r_t^i = (e^{\mu\Delta t + R^T Z\sqrt{\Delta t}})_t^i - 1, r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ r_N \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, I, \quad t = 1, \dots, T. \quad (4.2.2)$$

Ekvation (4.2.2) utgör basen för slumpgenereringen i programmet Matlab.

5 Optimeringsvillkor

Det primära målet med rapporten är att skapa en modell som genererar en portfölj som klara av att betala skulden varje tidsperiod med så lite risk som möjligt. Samtidigt har det framkommit att man ställer krav på tillväxten. Villkoren som presenteras nedan syftar till att förklara hur optimeringsmodellen är uppbyggd samt ge en förklaring till hur denna balans mellan tillväxt och risk har implementerats i modellen. Vi börjar med att definiera några parametrar och variabler som kommer att återkomma i kapitlet.

$x_{n,t}$ = Tillgång n vid tiden t (variabel).

X^0 = Tillgångarna vid tiden t = 0 (parameter, bestäms av användaren).

y_t^i = Kontanter vid tiden t i utfall i (variabel).

$r_{n,t}^i$ = Ränta på investering n vid tiden t i utfall i (stokastisk variabel).

r_y = Ränta på kontanterna på banken (konstant).

r_L = Ränta på skulden (parameter, bestäms av användaren).

L = Storlek på skulden (parameter, bestäms av användaren)¹.

M = Marginalen² vid tiden T.

5.1 Jämvikts samband

Då vi simulerar framtida scenarion kommer vi att ha I st. slumpvägar i T st. tidsperioder. Eftersom alla slumpvägar är olika kommer slumpningarna att generera olika resultat samtidigt som modellen optimerar en gemensam portföljallokering vid varje tidpunkt. Eftersom utfallen varierar kommer ett överskott/underskott att uppstå vilket just kommer sig av att portföljen allokeras lika oberoende slumpväg. Variationerna tas därför upp i en variabel y, som ses som kontanter som man sparar/lånar på banken. Själva transaktionen kommer inte att ske fysiskt, det är endast ett sätt att fånga upp variationerna. Genom att välja en låg tillväxtränta på kontanterna kan man försäkra sig om att man inte gynnas av att ha dem på banken då kontanterna är större än noll. Å andra sidan blir det ett billigt lån i händelsen av ett negativt värde på kontanterna. Med dessa osäkerheter i åtanke vill vi därför ha en så liten andel kontanter som möjligt. Enligt Bogtoft, E. et al. [2] definieras följande bivillkor:

$$\sum_{i=1}^I y_t^i / I = 0, \quad i = 1, \dots, I, \quad t = 1, \dots, T. \quad (5.1.1)$$

Snittvärdet av kontanterna över samtliga scenarion ska vara lika med noll. Vid tidpunkten t = 0 förutsätter modellen att vi inte har några kontanter dvs.

$$y_0^i = 0, \quad i = 1, \dots, I. \quad (5.1.2)$$

¹ Alternativt kan skulden ses som en stokastisk variabel. Eftersom modellen är en förenkling ses här skulden som konstant med fast reglerad ränta.

² Marginalen vid tiden t = 0 betecknas M^0 .

Vidare måste jämvikt råda vid varje tidsperiod, dvs. vi ställer upp följande bivillkor:

$$\sum_{n=1}^N [x_{n,t} - (1 + r_{n,t}^i)x_{n,t-1}] + y_t^i - (1 + r_y)y_{t-1}^i = -r_L L, \quad i = 1, \dots, I, \quad t = 1, \dots, T. \quad (5.1.3)$$

Vid varje tidsperiod allokeras en portfölj trots i st. olika utfall. Variationerna i varje utfall vid varje tidsperiod fångas upp i variabeln y , kontanter.

Vidare ska värdet på investeringen vid tiden $t = 0$ vara lika med tillgångarna vid samma tidpunkt dvs. vi ställer upp följande samband:

$$\sum_{n=1}^N x_{n,0} = X^0. \quad (5.1.4)$$

Varje tidsperiod måste varje värdepapper i portföljen vara större än eller lika med noll. Vi kan inte ha ett negativt antal värdepapper i portföljen. Detta leder till följande ekvation,

$$x_{n,t} \geq 0, \quad n = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T. \quad (5.1.5)$$

Man kan ange en gräns för hur stor andel ett specifikt värdepapper som portföljen får utgöras av. Denna andel styrs av parametern γ sådan att¹:

$$x_{s,t} \leq \gamma_s \sum_{n=1}^N x_{n,t}, \quad s = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T. \quad (5.1.6)$$

5.2 Basvillkor

Då vi inför variabeln y med tillhörande ränteutveckling och samtidigt inför tidsaspekten kan ekvation (2.2.8) skrivas som:

$$\alpha_t + I^{-1}(1 - \beta)^{-1} \sum_{i=1}^I z_t^i \leq w_t. \quad (5.2.1)$$

Där variabeln α_t är VaR-värdet och w_t är CVaR-värdet. Båda dessa variabler är en beskrivning av risk vid varje tidpunkt. De z_t^i som är positiva, dvs. de scenarion som faller utanför β -percentilen, kommer att påverka w_t . Ekvation (2.2.9) kan då med samma förutsättningar skrivas som²:

$$r_L L - \sum_{n=1}^N [(1 + r_{n,t}^i)x_{n,t-1}] - [(1 + r_y)y_{t-1}^i] - \alpha_t \leq z_t^i, \quad z_t^i \geq 0, \quad i = 1, \dots, I \quad t = 1, \dots, T \quad (5.2.2)$$

¹ $\gamma = 0,1$ för fastigheter, i enlighet med Svenska Kyrkans pensionskassas önskemål.

² I modellen är skulden oberoende av tiden pga. av att skuldräntan förutsätts vara fixerad.

Variabeln α_t antar det värde som det slumpscenario har, som överrensstämmer med β -percentilen vid tiden t . Om man exempelvis har hundra slumpvägar ($I = 100$) och har valt en percentil på 95% ($\beta = 0,95$) kommer α_t att resultera i det värde som det 95:e sämsta slumpscenariot har. Eftersom variabeln z_t^i måste vara större än, eller lika med noll, kommer z_t^i att vara noll i de scenarion som är större än, eller lika med α_t . I de scenarion som faller utanför β -percentilen kommer z_t^i att anta ett positivt värde. Ekvationerna (5.2.1) och (5.2.2) utgör basen i linjärprogrammet.

5.3 Minimering av risk

Enligt ekvation (5.2.1) gäller:

$\alpha_t + I^{-1}(1 - \beta)^{-1} \sum_{i=1}^I z_t^i \leq w_t$, där w_t är CVaR-värdet. Som tidigare framgått av rapporten ska risken minimeras. Vi ställer därför upp följande målfunktion:

$$\text{Minimera} \quad \sum_{t=1}^T w_t / T. \quad (5.3)$$

För att minimera risken från tiden $t = 0$ till tiden $t = T$ har jag valt att minimera snittvärdet av CVaR under alla tidsperioder dvs. en summering av CVaR från alla tidsperioder, dividerat med antalet tidsperioder. På detta sätt har jag samtliga tidsperioder i beaktande när jag minimerar risken.

5.4 Investeringsmål

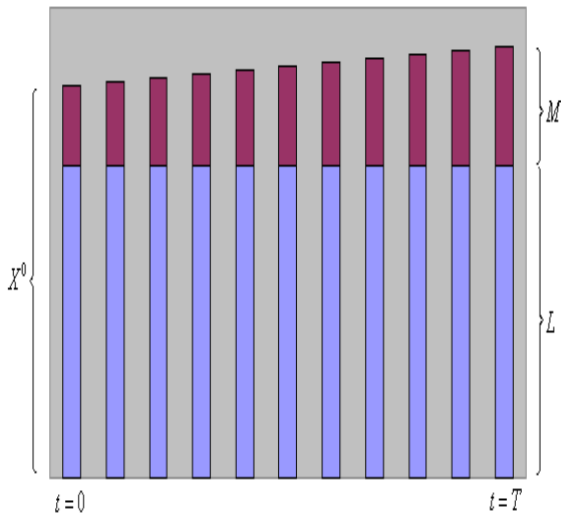
Det sekundära målet är att öka tillväxten på eget kapital. Kravet på att öka tillväxten samtidigt som man vill minimera risken, står i motsatsförhållande till varandra. För att lösa detta problem har jag låtit införa en parameter där man talar om vilket mål vid tiden noll man har på eget kapital vid tiden T . I rapporten betecknas det egna kapitalet för marginal, M . Sambandet mellan skuld, Tillgångar och marginal vid tiden $t = 0$ ges då av:

$$X^0 = L + M^0, \quad (5.4.1)$$

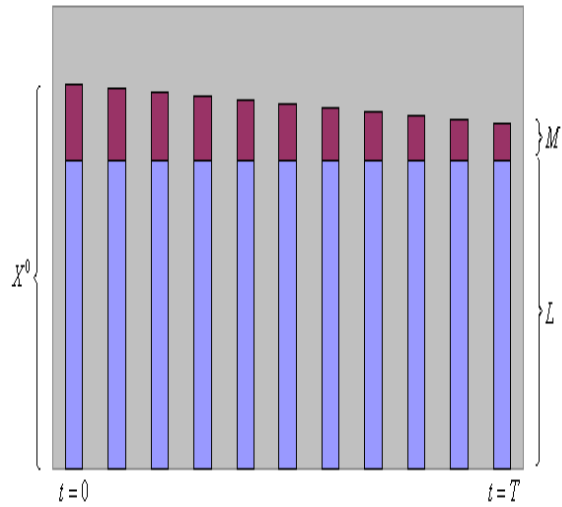
och vid tiden T gäller:

$$\sum_{n=1}^N x_{n,t} \geq L + M, \quad \text{med tillräckligt stor sannolikhet.} \quad (5.4.2)$$

Eftersom modellen minimerar risken i målfunktionen och jag nu samtidigt ställer krav på tillväxten vill jag "tvinga"/"släppa efter" på målfunktionen med jämna steg varje tidsperiod. Jag eftersträvar en jämnt fördelad tillväxt och en jämnt fördelad risk under hela tidsförloppet. Jag skapar bivillkoret sådant att tillväxten ökar/minskar linjärt enligt figur (5.4.1) och (5.4.2).



Figur 5.4.1: De blå kolumnerna är skulden och de röda kolumnerna är marginalen. Vid tiden $t = T$ har man större krav på marginal än vid $t = 0$.



Figur 5.4.2: De blå kolumnerna är skulden och de röda kolumnerna är marginalen. Vid tiden $t = T$ har man mindre krav på marginal än vid $t = 0$.

Det innebär att jag måste ta hänsyn till om jag har en marginal M^0 vid tiden $t = 0$ och eftersom jag i modellen endast har möjlighet att ange X^0 , L och M , leder det mig till följande bivillkor:

$$\sum_{n=1}^N x_{n,t} \geq X^0 + (M - \underbrace{(X^0 - L)}_{=M^0}) \frac{t}{T}, \quad t = 1, \dots, T. \quad (5.4.3)$$

5.5 Övriga bivillkor

Vi har kapitlet beskrivit basvillkor, jämviktsvillkor och målfunktion som tillsammans optimerar en portfölj beroende på vilka förutsättningar som ges vid utgångspunkten. Nedan presenterar jag ytterligare fem bivillkor som inte påverkar optimeringen. Dessa bivillkor har till uppgift att presentera ytterligare information till användaren och pedagogiskt beskriva olika utvecklingsförlopp som enligt modellen är möjliga.

Den slumpväg som genererar maximal mängd kontanter vid varje tidsperiod ges av:

$$y_t^{\max} \geq y_t^i, \quad i = 1, \dots, I, \quad t = 1, \dots, T. \quad (5.5.1)$$

Den slumpväg som genererar minimal mängd kontanter vid varje tidsperiod ges av:

$$y_t^{\min} \leq y_t^i, \quad i = 1, \dots, I, \quad t = 1, \dots, T. \quad (5.5.2)$$

Med ekvation (5.5.1) kan då den maximala portföljen V_t^{\max} vid varje tidpunkt skrivas enligt:

$$V_t^{\max} = \sum_{n=1}^N x_{n,t} + y_t^{\max}, \quad i = 1, \dots, I, \quad t = 1, \dots, T. \quad (5.5.3)$$

Medelportföljen V_t^{medel} vid varje tidsperiod, tillsammans med ekvation (5.1.1), kan skrivas enligt:

$$V_t^{medel} = \sum_{n=1}^N x_{n,t}, \quad i = 1, \dots, I, \quad t = 1, \dots, T. \quad (5.5.4)$$

Bivillkoren (5.4.3) och (5.5.4) ger tillsammans:

$$V_t^{medel} \geq X^0 + (M - \underbrace{(X^0 - L)}_{=M^0}) \frac{t}{T}, \quad t = 1, \dots, T. \quad (5.5.5)$$

Vilket leder oss till att investeringsmålet är mindre än, eller lika med medelportföljen.

Tillsammans med ekvation (5.5.2) ges den minimala portföljen V_t^{\min} vid varje tidpunkt av:

$$V_t^{\min} = \sum_{n=1}^N x_{n,t} + y_t^{\min}, \quad i = 1, \dots, I, \quad t = 1, \dots, T. \quad (5.5.6)$$

6 Formalisering

Modellen som jag har utgått ifrån är ett linjärprogram som är anpassat för en pensionskassa där man minimerar premien för de aktiva medlemmarna (se Bogentoft, E. et al. 2001 [2]). Då vi har en annan målsättning har målfunktion, ekvationer, variabler, konstanter och parametrar ändrats. Beräkningarna utförs i programmet Gnu Linear Programming Kit (GLPK) och modellen är skriven i AMPL format (A Mathematical Programming Language).

6.1 Definitioner

Tiden delas in i lika stora intervall där man utgår ifrån tidpunkt noll. Tidshorisonten är T och t definieras som $t \in 0,1,\dots,T$. Vid varje tid t görs ett val som gäller fram till tiden $t + 1$. Däremellan kan man inte göra något val och portföljen påverkas endast av slumpen. I rapporten är en tidsperiod ett år.

Parametrar:

N	=	Antalet värdepapper.
I	=	Antalet utfall/slumpvägar.
T	=	Antalet tidsperioder.
X^0	=	Hur stora tillgångarna är vid tiden $t = 0$.
L	=	Hur stor skulden är.
M	=	Hur stor marginal i förhållande till skulden som eftersträvas vid tiden $t = T$.
β	=	Den percentil (VaR) man vill mäta CVaR emot.
r_L	=	Ränta på skulden.
r_y	=	Ränta på kontanter.

Stokastiska variabler:

$r_{n,t}^i$	=	Avkastning på tillgång n vid tiden t i slumpväg i .
$r_{1,t}^i$	=	Avkastning på svenska obligationer vid tiden t i slumpväg i .
$r_{2,t}^i$	=	Avkastning på utländska obligationer vid tiden t i slumpväg i .
$r_{3,t}^i$	=	Avkastning på OMXS 30 vid tiden t i slumpväg i .
$r_{4,t}^i$	=	Avkastning på MCSI World vid tiden t i slumpväg i .
$r_{5,t}^i$	=	Avkastning på svenska fastigheter vid tiden t i slumpväg i .

Variabler:

$x_{n,t}$ = Pengar investerat i tillgång n vid tiden t. Variabeln är lika stor i alla scenarion under samma tidsperiod.

$x_{1,t}$ = Pengar investerat i nollkupongsobligationer vid tiden t.

$x_{2,t}$ = Pengar investerat i utländska obligationer vid tiden t.

$x_{3,t}$ = Pengar investerat i OMXS 30, svenskt aktieindex, vid tiden t.

$x_{4,t}$ = Pengar investerat i MSCI World, utländskt aktieindex, vid tiden t.

$x_{5,t}$ = Pengar investerat i svenska fastigheter vid tiden t.

y_t^i = Pengar i kontanter i slumpväg i vid tiden t. Variabel för att fånga upp variationer i de olika utfallen.

y_t^{\max} = Kontanternas maximala värde vid tiden t, dvs. kontanter i det scenario som avviker mest då $y_t^i > 0$.

y_t^{\min} = Kontanternas minimala värde vid tiden t, dvs. kontanter i det scenario som avviker mest då $y_t^i < 0$.

α_t = β -VaR vid tiden t, bivariabel som erhålles vid optimal lösning.

z_t^i = Extra variabel, förlust för utfall som faller utanför percentilen α_t vid tiden t i scenario i.

w_t = CVaR-värdet vid tiden t.

V_t^{\max} = Den maximala portföljen vid tiden t.

V_t^{medel} = Medelportföljen vid tiden t.

V_t^{\min} = Den minimala portföljen vid tiden t.

Konstanter:

γ_n = Konstanten är en vikt sådan att $0 \leq \gamma_n \leq 1$ och utgör en andel av portföljen som värdepapper n maximalt kan innehålla.

6.2 Problemupställning

$$\text{Minimera} \quad \sum_{t=1}^T w_t / T, \quad (5.3)$$

då

$$\sum_{n=1}^N x_{n,0} = X^0, \quad (5.1.4)$$

$$y_0^i = 0, \quad i = 1, \dots, I. \quad (5.1.2)$$

$$x_{s,t} \leq \gamma_s \sum_{n=1}^N x_{n,t}, \quad s = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T. \quad (5.1.6)$$

$$r_L L - \sum_{n=1}^N [(1 + r_{n,t}^i) x_{n,t-1}] - [(1 + r_y) y_{t-1}^i] - \alpha_t \leq z_t^i, \quad i = 1, \dots, I, \quad t = 1, \dots, T. \quad (5.2.2)$$

$$\alpha_t + I^{-1} (1 - \beta)^{-1} \sum_{i=1}^I z_t^i \leq w_t, \quad t = 1, \dots, T. \quad (5.2.1)$$

$$\sum_{n=1}^N [x_{n,t} - (1 + r_{n,t}^i) x_{n,t-1}] + y_t^i - (1 + r_y) y_{t-1}^i = -r_L L, \quad i = 1, \dots, I, \quad t = 1, \dots, T. \quad (5.1.3)$$

$$\sum_{i=1}^I y_t^i / I = 0, \quad i = 1, \dots, I, \quad t = 1, \dots, T. \quad (5.1.1)$$

$$\sum_{n=1}^N x_{n,t} \geq X^0 + (M - \underbrace{(X^0 - L)}_{=M^0}) \frac{t}{T}, \quad t = 1, \dots, T. \quad (5.4.3)$$

$$z_t^i \geq 0, \quad i = 1, \dots, I, \quad t = 1, \dots, T. \quad (5.5.2)$$

$$x_{n,t} \geq 0, \quad n = 1, \dots, N, \quad t = 1, \dots, T. \quad (5.1.5)$$

$$y_t^{\max} \geq y_t^i, \quad i = 1, \dots, I, \quad t = 1, \dots, T. \quad (5.5.1)$$

$$y_t^{\min} \leq y_t^i, \quad i = 1, \dots, I, \quad t = 1, \dots, T. \quad (5.5.2)$$

$$V_t^{\max} = \sum_{n=1}^N x_{n,t} + y_t^{\max}, \quad i = 1, \dots, I, \quad t = 1, \dots, T. \quad (5.5.3)$$

$$V_t^{\text{medel}} = \sum_{n=1}^N x_{n,t}, \quad i = 1, \dots, I, \quad t = 1, \dots, T. \quad (5.5.4)$$

$$V_t^{\min} = \sum_{n=1}^N x_{n,t} + y_t^{\min}, \quad i = 1, \dots, I, \quad t = 1, \dots, T. \quad (5.5.6)$$

7 Resultat

Vid varje tidsperiod optimeras en ny portfölj och modellen genererar på detta sätt en förvaltningsstrategi som sträcker sig från tiden noll till och med tiden $T-1$ ¹. Jag förutsätter dock att man endast är intresserad av ett beslutsunderlag vid tiden noll som sträcker sig fram t.o.m. tiden T och inte att strategin åtföljs. Jag förutsätter således att användaren kontinuerligt optimerar fram nya resultat eftersom förutsättningarna hela tiden kommer att ändras med tiden.

Som resultat presenteras tre grafer, en normalfördelningskurva över utfallen vid tiden noll, en graf som presenterar portföljallokeringarna vid tiden noll till och med tiden $T-1$, samt en graf som presenterar relevanta portföljutvecklingar från tiden noll t.o.m. tiden $T-1$.

För att leva upp till Svenska Kyrkans krav har jag låtit väsentliga parametrar varit valbara för att ge dem en möjlighet att iterativt pröva olika möjligheter på egen hand. Därför har följande sju parametrar införts:

I	=	Antalet slumpningar vid varje tidsperiod/antalet slumpvägar.
T	=	Antalet tidsperioder.
X^0	=	Hur stora tillgångarna är vid tiden $t = 0$.
L	=	Hur stor skulden är.
M	=	Hur stor marginal som eftersträvas vid tiden $t = T$.
β	=	Den percentil (VaR) man vill mäta CVaR emot.
r_L	=	Ränta på skulden.

I kapitlet varierar en parameter och övriga parametrar är fixerade för att åskådliggöra eventuell påverkan.

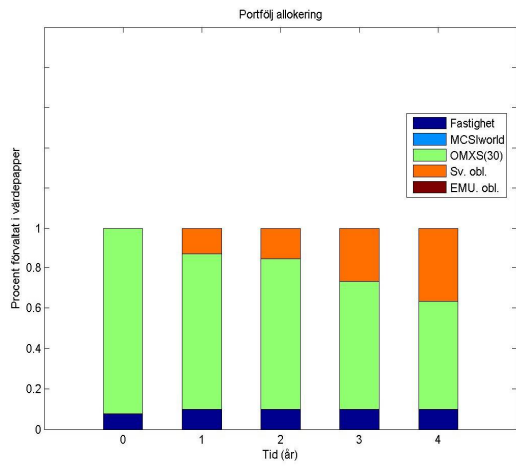
7.1 Tillgångar varierar, övriga parametrar är fixerade

Förutsättningarna vid start innefattas av tillgångarna, skulden och ränta på skulden. Dessa påverkar modellen på likande sätt pga. modellens konstruktion, dvs. en minskning av skulden kan ersättas av en ökning av tillgångarna och vice versa. Givetvis gäller detta under förutsättning att de båda parametrarna förhåller sig lika till varandra. Alternativet hade varit att ha ett förhållande mellan parametrarna istället och på så sätt endast behöva tilldela modellen ett värde istället för två. För att undvika missförstånd var det dock enklare att tilldela båda parametrarna värden, dock visar jag här endast ett resultat av dem. Följande indata användes:

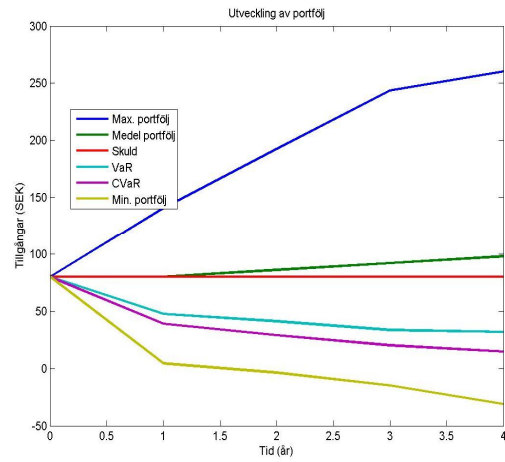
X^0	Varietas.
I	= 1000.
T	= 5.
L	= 80.
M	= 30.
β	= 0,95.
r_L	= 0,05.

¹ Varje portföljallokering grundar sig på en simulering till framförvarande tidsperiod. Väljer man en tidshorisont på T st. tidsperioder kommer den sista portföljallokeringen att vara vid tiden $T-1$.

$$X^0 = 80:$$

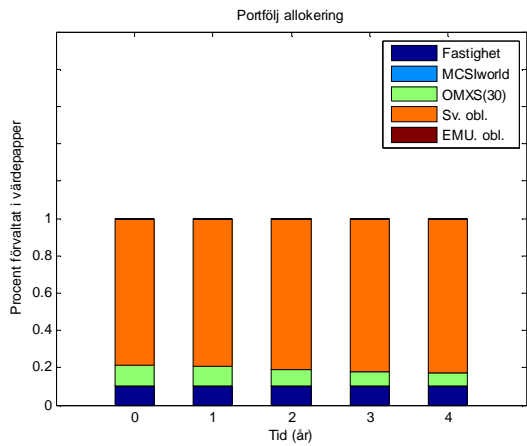


Figur 7.1.1

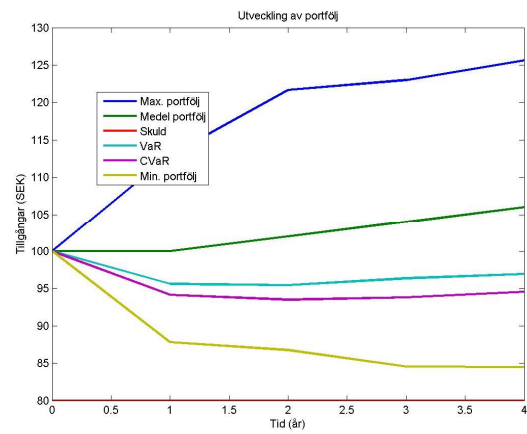


Figur 7.1.2

$$X^0 = 100:$$

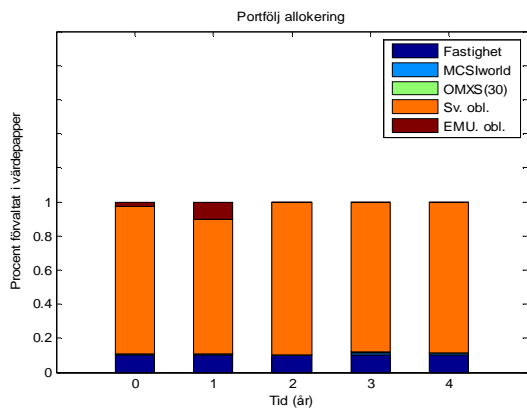


Figur 7.1.3

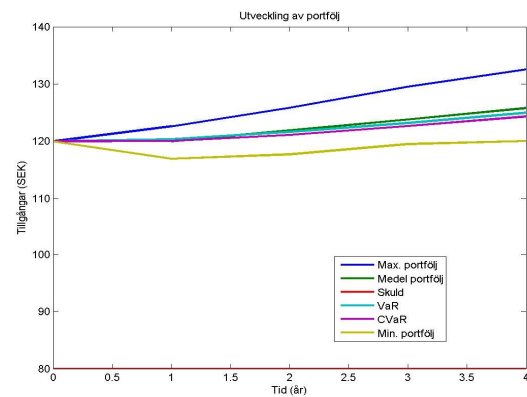


Figur 7.1.4

$$X^0 = 120:$$

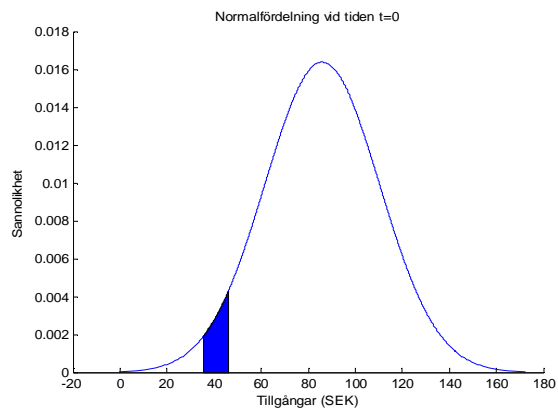


Figur 7.1.5



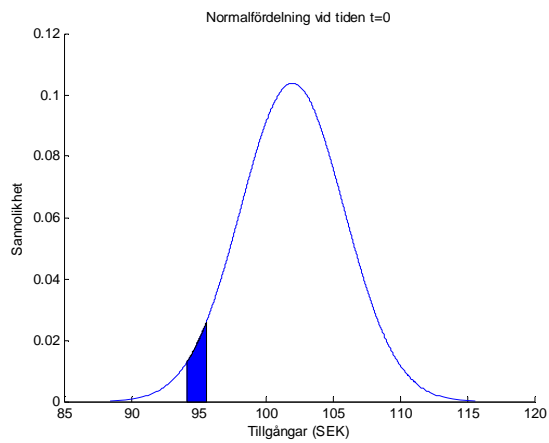
Figur 7.1.6

$$X^0 = 80:$$



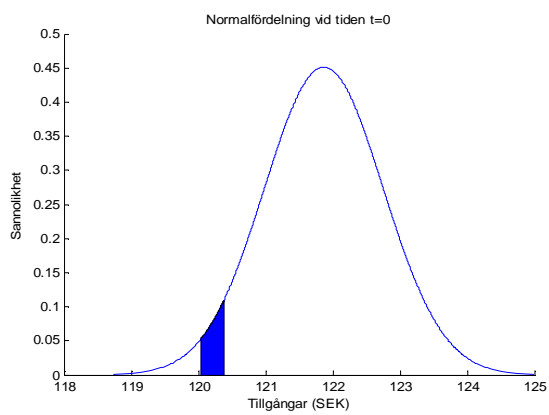
Figur 7.1.8

$$X^0 = 100:$$



Figur 7.1.8

$$X^0 = 120:$$



Figur 7.1.9

Då vi varierar tillgångarna och samtidigt har ett mål att nå en viss tillväxt, $M = 30$, är det naturligt att vi får en kraftig riskexponering vid låga värden på tillgångarna vid start och en mindre riskexponering för höga värden. Detta framgår tydligt i samtliga figurer, bl.a. så ser vi att portföljallokeringen till största delen består av aktier i figur 7.1.1 och att portföljen i figur 7.1.5 domineras av räntebärande papper. Riskexponering framgår av normalfördelningskurvorna och spridningen av portföljerna i figur 7.1.2, figur 7.1.4 och figur 7.1.6. I figur 7.1.2 framkommer att max- och min- portföljen ligger långt ifrån varandra och VaR och CVaR ligger tydligt under den röda linjen (skulden). I figur 7.1.6 ligger å andra sidan all linjer samlat med stor marginal till skulden vid samtliga tidpunkter.

I figur 7.1.1 kan man tyda en kraftig minskning av volatila värdepapper då tiden ökar. Vid tiden $t=0$ består portföljen av ca: 90 % aktier och 10 % fastigheter och vid tiden $t=4$ består portföljen av ca: 60% aktier, 30% räntebärande värdepapper och 10% fastigheter. Ett liknande mönster kan urskiljas ur figur 7.1.2 då andelen aktier uppnår sitt maximala värde vid tiden $t=0$.

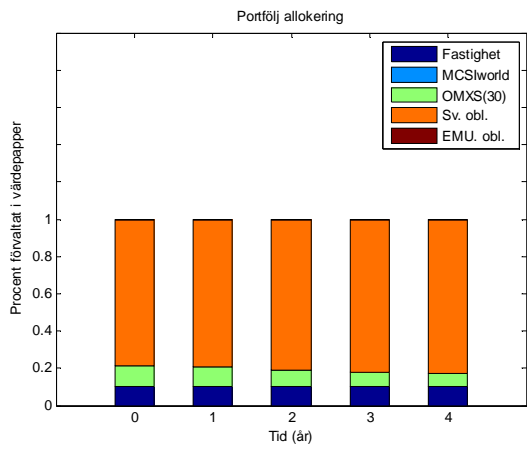
I figurerna 7.1.3 -7.1.5 illustreras just detta samband då en kraftig spridning från tiden $t=0$ till tiden $t=1$ vittnar om en volatil portfölj. Med tilltagande t kan en stabilisering urskiljas i volatiliteten med avtagande lutning på maxportföljen och tilltagande lutning på minportföljen. Även resterande linjer såsom VaR, CVaR och medelportfölj planar ut med tiden.

7.2 Antalet slumpningar varierar, övriga parametrar är fixerade

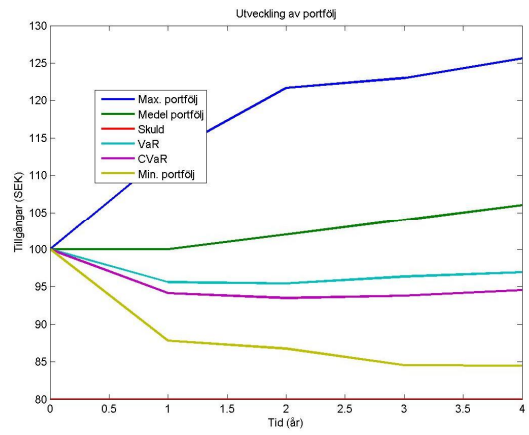
Följande data användes:

X^0	=	100.
I	Varieras.	
T	=	5.
L	=	80.
M	=	30.
β	=	0,95.
r_L	=	0,05.

$I = 1000$:

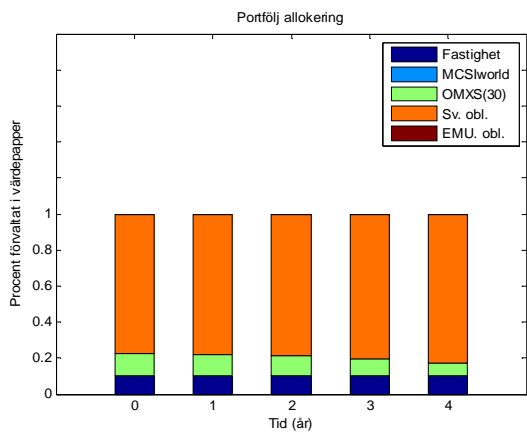


Figur 7.2.1

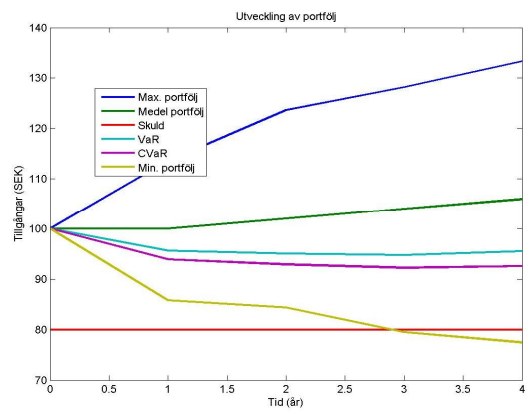


Figur 7.2.2

$I = 5000$:

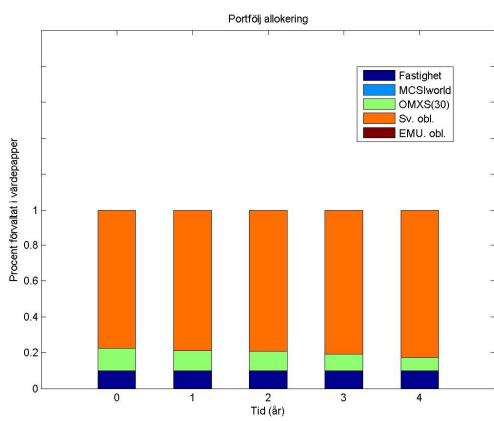


Figur 7.2.3

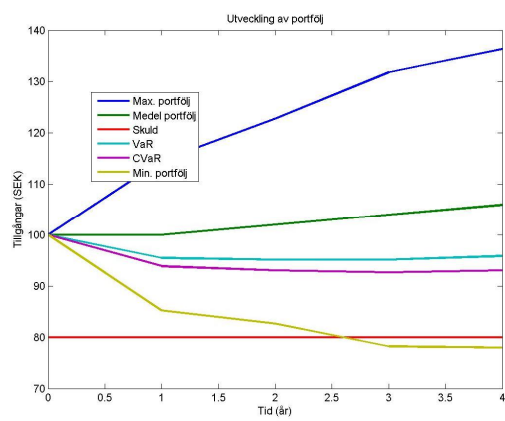


Figur 7.2.4

$I = 10000$:

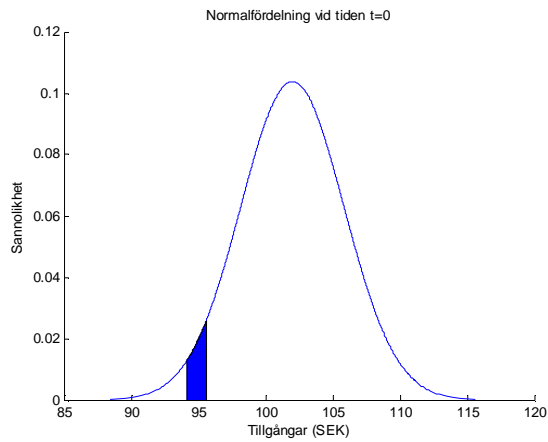


Figur 7.2.5



Figur 7.2.6

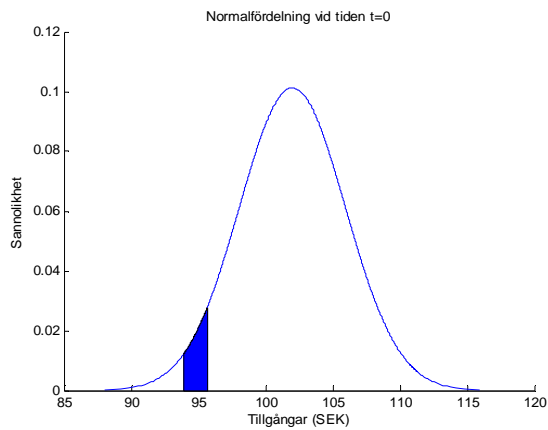
$I = 1000$:



Figur 7.2.7

Time used: 85.1 secs
Memory used: 38.1 Mb (39946815 bytes)
Model has been successfully processed

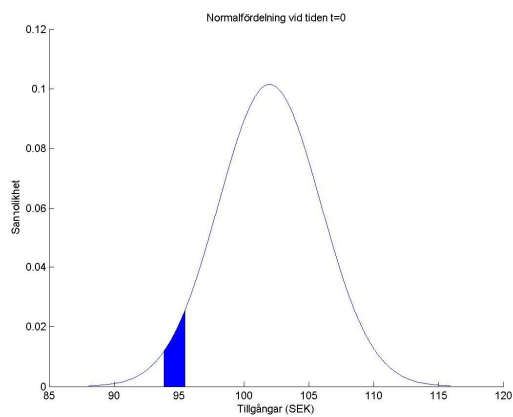
$I = 5000$:



Figur 7.2.8

Time used: 4551.0 secs
Memory used: 190.0 Mb (199262879 bytes)
Model has been successfully processed

$I = 10000$:



Figur 7.2.9

Time used: 30916.0 secs
Memory used: 379.9 Mb (398324047 bytes)
Model has been successfully processed

Givetvis ökar noggrannheten i modellen med ett ökande antal slumpningar. Detta är dock på bekostnad av datorkraft. För att ta ett exempel så tog det ungefär 1,5 minut att lösa $I = 1000$ slumpningar, 1,25 timmar att lösa $I = 5000$ slumpningar och drygt 7 timmar att lösa 10000 slumpningar varje tidsperiod. Dock är portföljen allokerad på ungefär samma sätt varje tidsperiod vilket framgår av figur 7.2.1, figur 7.2.3 och figur 7.2.5 och samma resultat kan urskiljas från figurerna 7.2.7-7.2.9.

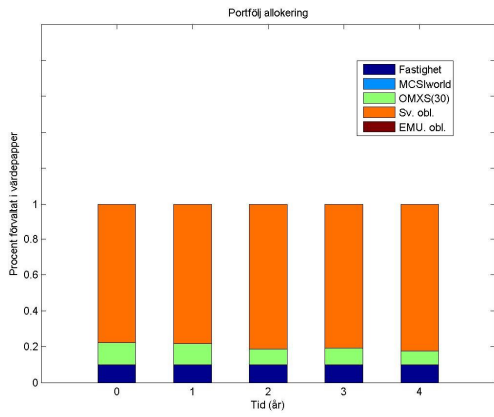
En något större spridning av maxportföljen och minportföljen kan urskiljas med växande antal slumpvägar vilket framgår av figurerna 7.2.2 och 7.2.4. Mellan figur 7.2.4 och 7.2.6 finns små skillnader dock verkar spridningen av maxportföljen och minportföljen ha stabiliserats.

7.3 Antalet tidsperioder varierar, övriga parametrar är fixerade

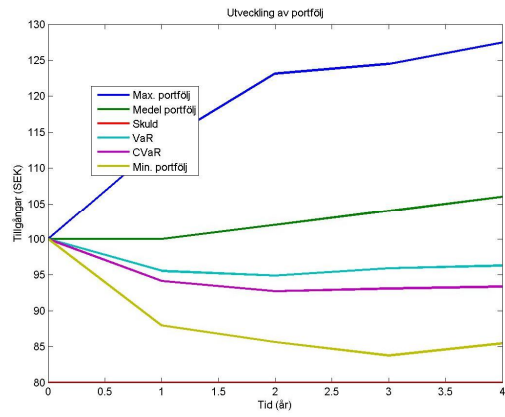
Följande indata användes:

X^0	=	100.
I	=	1000.
T	=	Varieras.
L	=	80.
M	=	30.
β	=	0,95.
r_L	=	0,05.

$T = 5:$

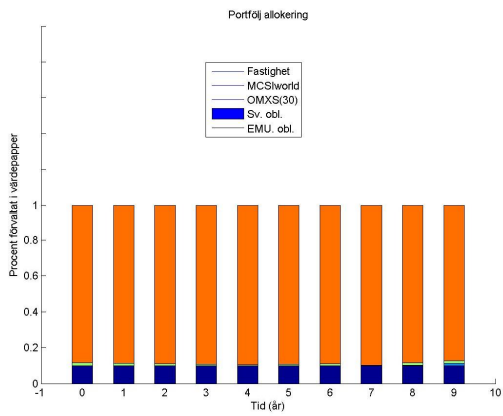


Figur 7.3.1

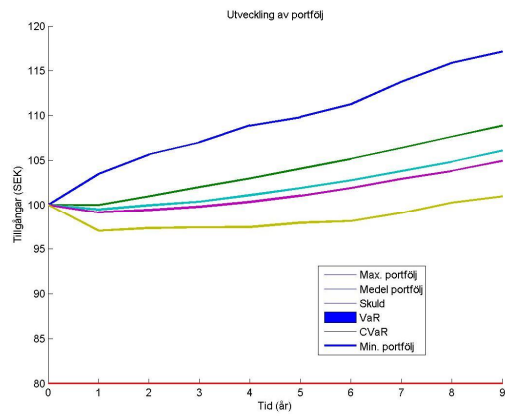


Figur 7.3.2

$T = 10:$

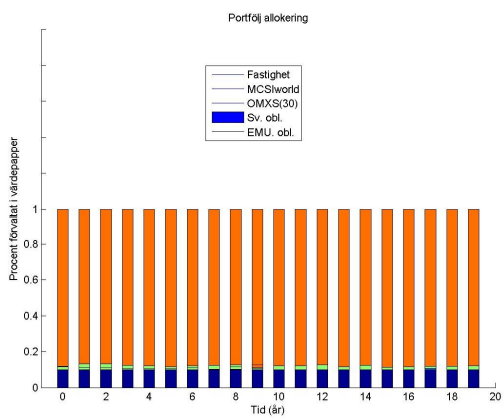


Figur 7.3.3

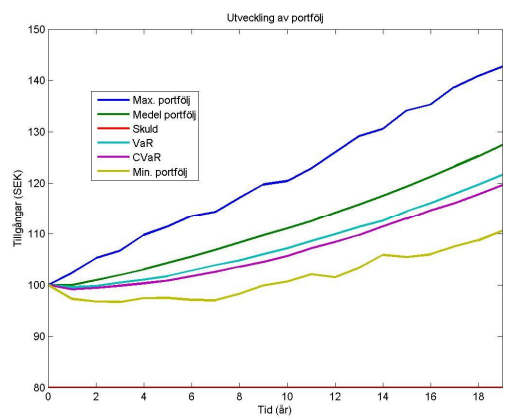


Figur 7.3.4

$T = 20:$

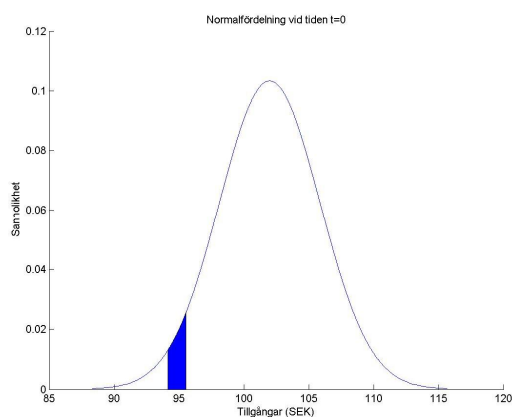


Figur 7.3.5



Figur 7.3.6

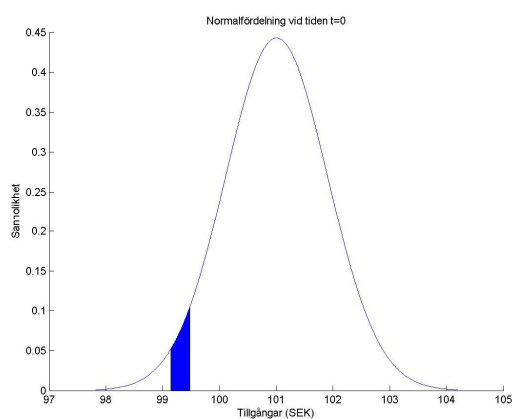
$T = 5:$



Figur 7.3.7

Time used: 85.1 secs
Memory used: 38.1 Mb (39946815 bytes)
Model has been successfully processed

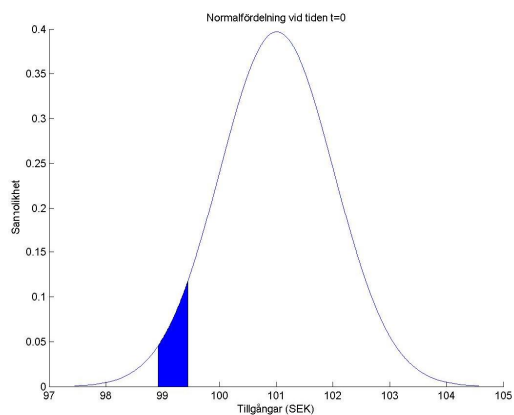
$T = 10:$



Figur 7.3.8

Time used: 460.6 secs
Memory used: 75.3 Mb (78974513 bytes)
Model has been successfully processed

$T = 20:$



Figur 7.3.9

Time used: 2356.0 secs
Memory used: 149.8 Mb (157061573 bytes)
Model has been successfully processed

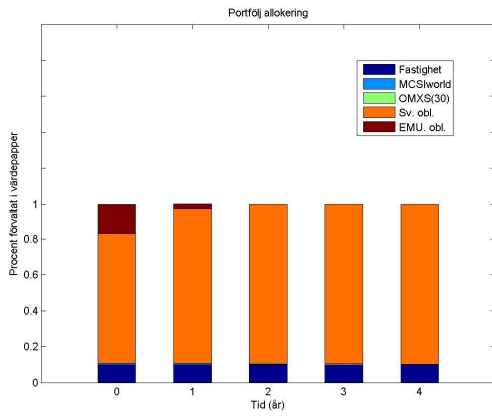
Av figurerna 7.3.1, 7.3.3 och 7.3.5 framgår att portföljen består av en tydligare exponering av volatila värdepapper vid korta val av tidsperioder. Av figurerna 7.3.2, 7.3.4 och 7.3.6 och figurerna 7.3.7-7.3.9 framgår att en lägra spridning av slumpningarna med stora val av tidsperioder.

7.4 Marginalen varierar, övriga parametrar är fixerade

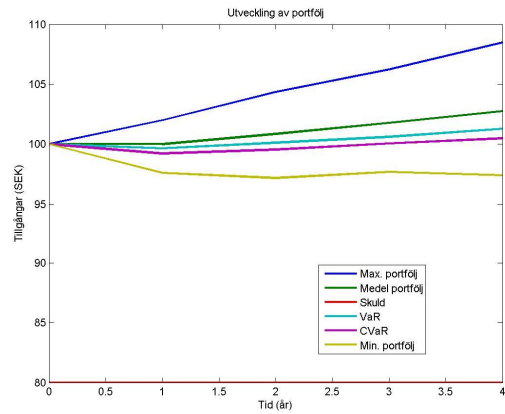
Följande indata användes:

X^0	=	100.
I	=	1000.
T	=	5.
L	=	80.
M	=	<i>Varieras.</i>
β	=	0,95.
r_L	=	0,05.

$M = 0$:

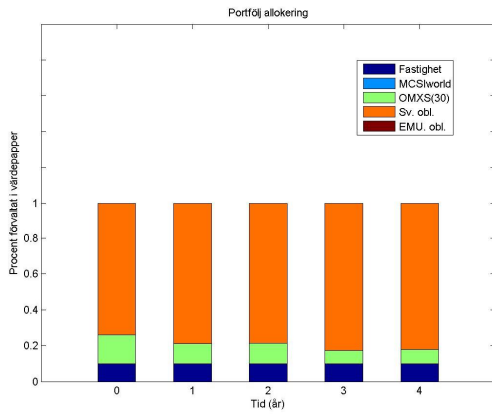


Figur 7.4.1

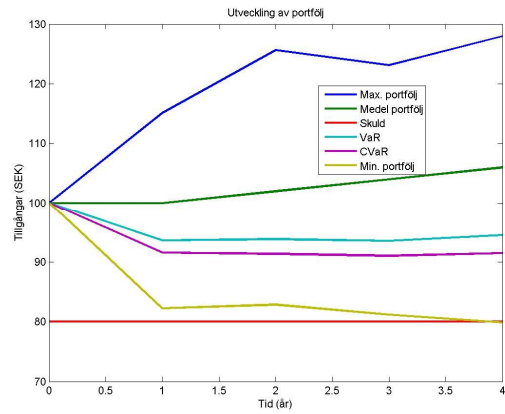


Figur 7.4.2

$M = 30$:

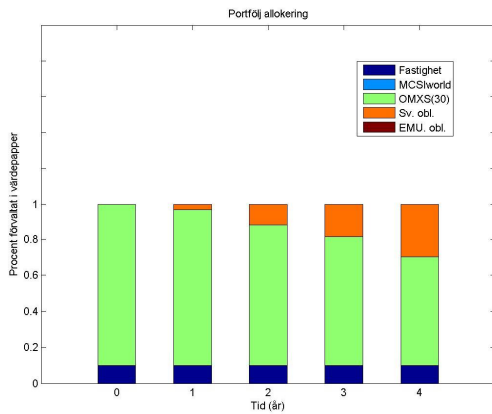


Figur 7.4.3

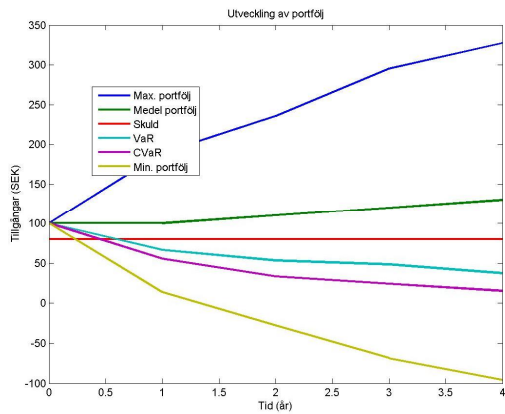


Figur 7.4.4

$M = 70$:

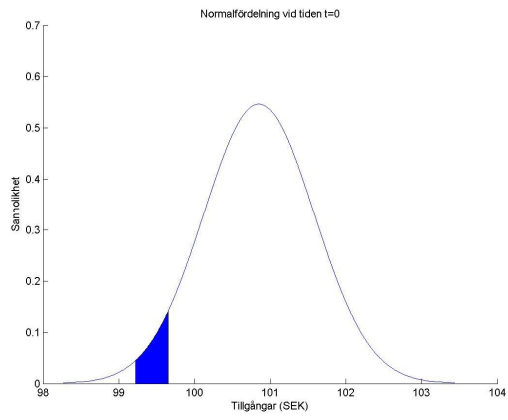


Figur 7.4.5



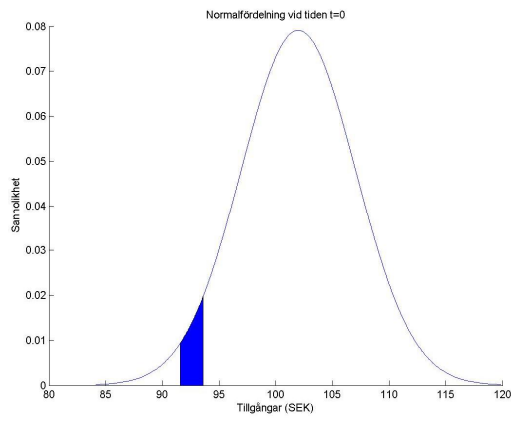
Figur 7.4.6

$M = 0$:



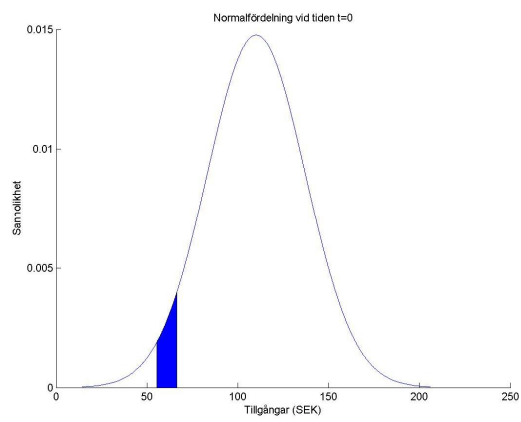
Figur 7.4.7

$M = 30$:



Figur 7.4.8

$M = 70$:



Figur 7.4.9

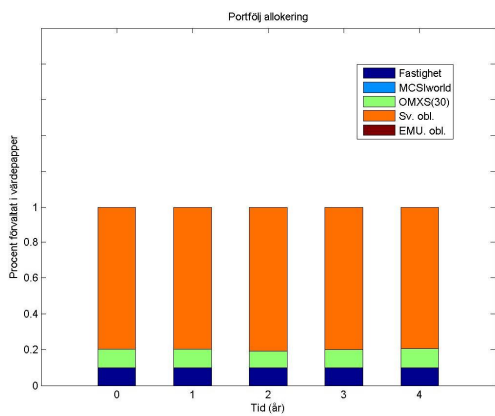
Samtliga figurer åskådliggör en avvägning mellan risk och karv på tillväxt. Det framgår att en tydlig exponering av volatila värdepapper ökar med tilltagande marginal. Det kommer sig av att ett högre krav på tillväxt innebär ett högre risktagande.

7.5 Risken varierar, övriga parametrar är fixerade

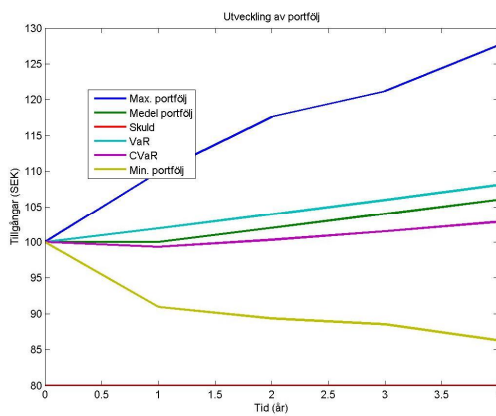
Följande indata användes:

X^0	=	100.
I	=	1000.
T	=	5.
L	=	80.
M	=	30.
β	=	<i>Varieras.</i>
r_L	=	0,05.

$\beta = 0,5$

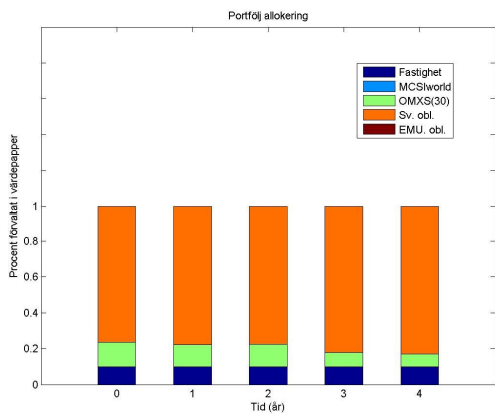


Figur 7.5.1

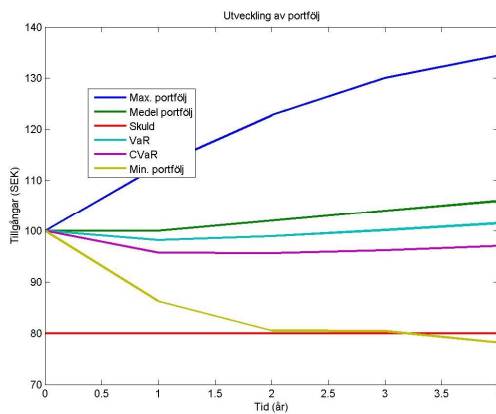


Figur 7.5.2

$\beta = 0,8$

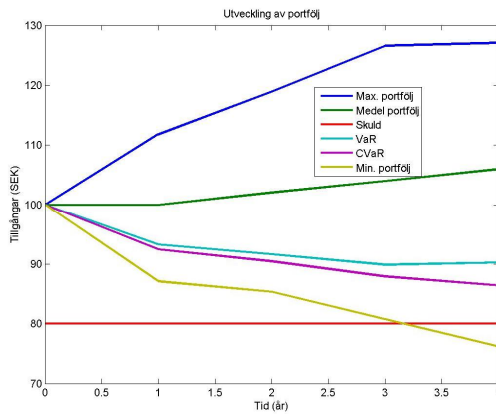
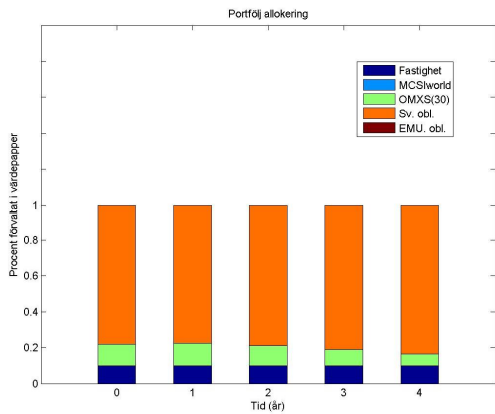


Figur 7.5.3



Figur 7.5.4

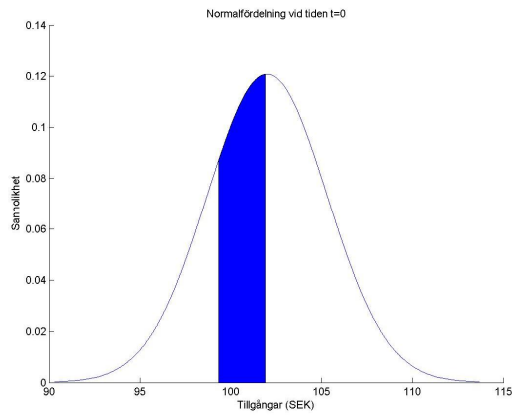
$\beta = 0,99$



Figur 7.5.5

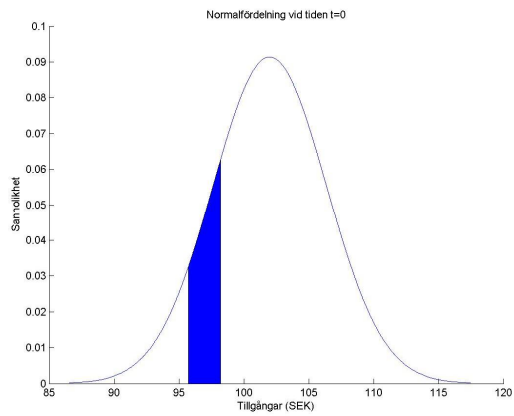
Figur 7.5.6

$\beta = 0,5$



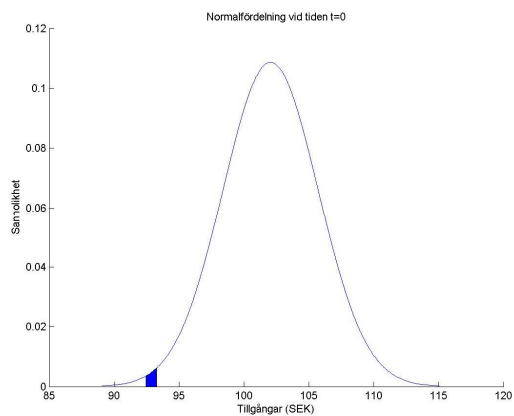
Figur 7.5.7

$\beta = 0,8$



Figur 7.5.8

$\beta = 0,99$



Figur 7.5.9

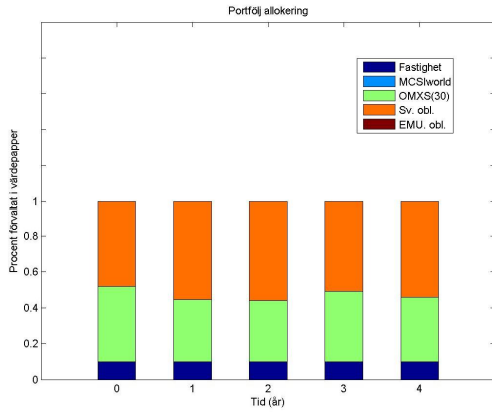
Portföljallokeringen ändras inte nämnvärt då riskmålet ändras. Modellen minimerar risken men kravet på marginal överstyr. Av samtliga figurer framgår en förskjutning av de olika riskmåten medans min-, medel- och maxportföljen består oavsett riskmål.

7.6 Räntan på skulden varierar, övriga parametrar är fixerade

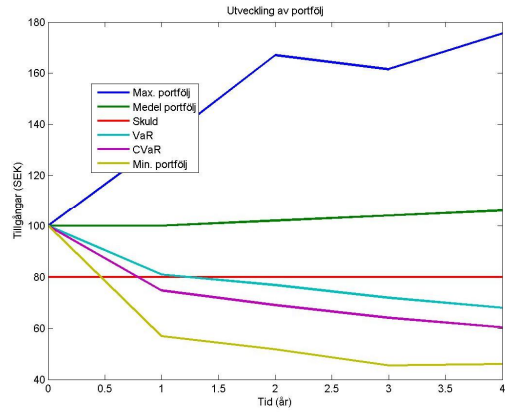
Följande indata användes:

X^0	=	100.
I	=	1000.
T	=	5.
L	=	80.
M	=	30.
β	=	0,95.
r_L	=	<i>Varieras.</i>

$$r_L = 0,08:$$

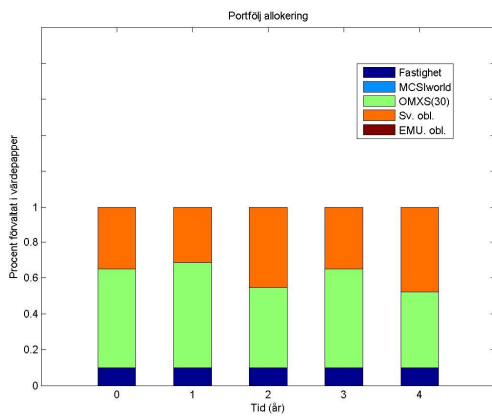


Figur 7.6.1

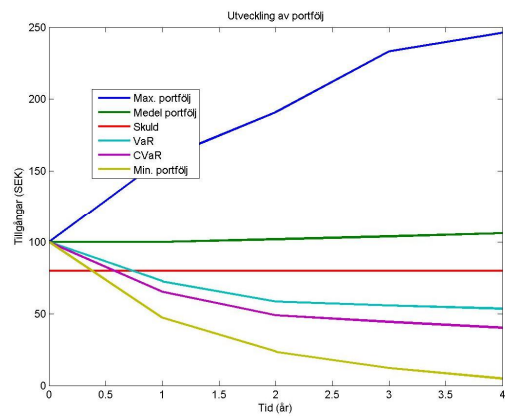


Figur 7.6.2

$$r_L = 0,10:$$

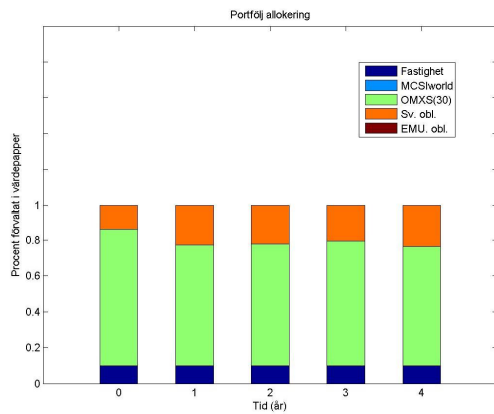


Figur 7.6.3

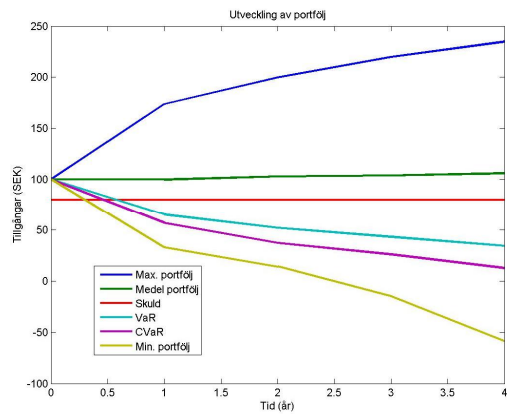


Figur 7.6.4

$$r_L = 0,12:$$

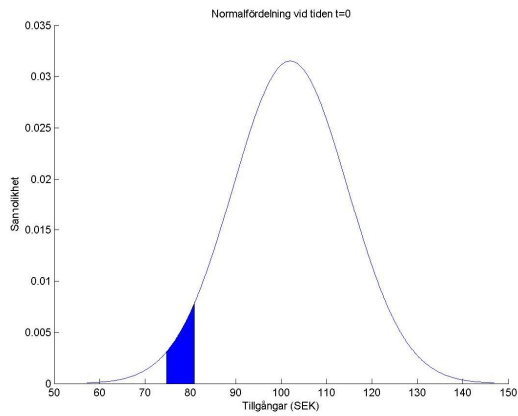


Figur 7.6.5



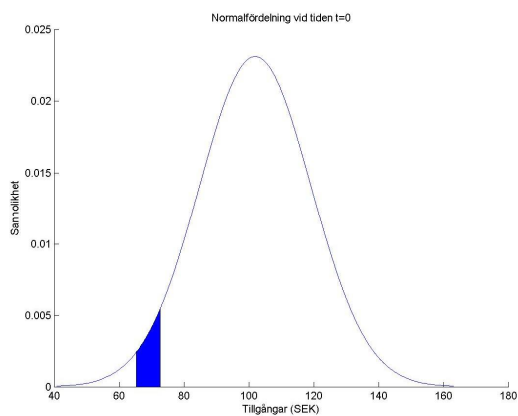
Figur 7.6.6

$r_L = 0,08:$



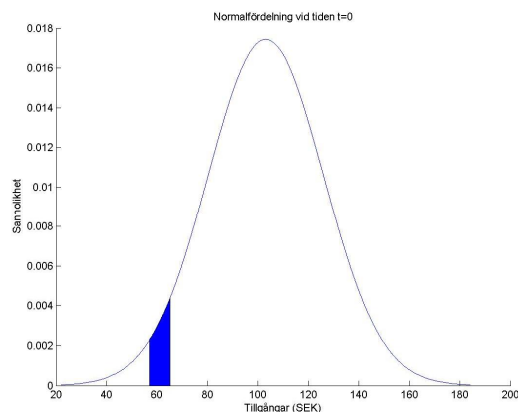
Figur 7.6.7

$r_L = 0,10:$



Figur 7.6.8

$r_L = 0,12:$



Figur 7.6.9

En naturlig ökning av aktier med tilltagande skuldränta. Modellen minimerar risken med bivillkoret att kravet på marginal måste vara uppfyllt. En något varierande portföljallokering varje tidpunkt kan urskiljas vilket sannolikt beror på ,ängden slumpningar. En större mängd slumpningar sannolikt plana ut variationerna och ge en jämnare portföljallokering över tiden.

8 Diskussion

Modellen är anpassad efter de önskemålen som Svenska Kyrkans pensionkassa har. Jag har skapat en modell där man kan variera noggrannheten genom att personen som gör analysen, själv kan variera risken och antalet slumpvägar. Tillgångar, skuld och ränta på skuld kan varieras beroende på förutsättningar vid tiden noll. Vidare kan marginalen varieras beroende på krav och tiden ändras beroende på vilken tidshorisont man väljer. Resultaten presenteras i tre figurer för att pedagogiskt beskriva vilken risk man med valda parametrar utsätts för. Man kan iterativt pröva olika parametrar för att se hur de påverkar resultaten och på detta sätt få olika beslutsunderlag.

Det finns flera olika sätt att lösa stokastiska problem, man kan använda sig av olika simuleringstekniker eller stokastisk programmering där man använder sig av binomialträd. Binomialträd ger på ett tidigt stadium alltför stora och komplexa lösningar som kräver extrem datorkapacitet. Man strävar efter att på något sätt inskränka slumpmöjligheterna så att de på ett bättre sätt speglar verkliga scenarion för att få problemet hanterbart. Simulering är å andra sidan mer utspritt och de flesta finansiella institutioner kan tillhandahålla med relevant data. Kvaliteten varierar beroende på vilken simuleringsteknik man använder och förutsätter oftast approximationer och antaganden om verkligheten. I modellen används Monte Carlo simulering där de lottade utfallen är korrelerade.

I modellen har förenklingar gjorts av skulden och räntan på skulden som antas vara fast. Dessa parametrar kan ändras för att exempelvis anpassas bättre till en pensionskassa. Det förutsätter dock att man har kännedom om pensionskassans utveckling av skulden.

Valet av värdepapper kan ändras efter behov genom att lägga till eller dra ifrån tidserier i modellen. Längden på tidshistoriken kan ändras efter behov. I uppsatsen sträcker sig det historiska datat från December 1998 till och med December 2008.

I modellen finns ett bivillkor som begränsar mängden fastigheter i portföljen och det har skett på Kyrkans inrådan. Utan detta bivillkor skulle fastigheter dominera portföljen i de flesta fall. Det beror på att tidseriernas historik under vald 10-årsperiod har en överlägsen avkastning i förhållande till volatiliteten i jämförelse med övriga tidserier. Beroende på behov kan bivillkor läggas till eller dras ifrån i modellen för att bättre anpassas till en specifik pensionskassa.

Målfunktionen generera en portföljviktning som är viktad med något högre risk i början av tidsperioden och något mindre i slutet av tidsperioden. Det beror dels på att alla slumpningar utgår ifrån en punkt vid tiden noll vilket ger ett begränsat urval vid just denna tidpunkt. Vid senare tidpunkter finns en utgångspunkt för varje slumpning vilket också ger en större variation. Variabeln y , kontanter, är noll för samtliga slumpningar vid tiden noll. Under senare tidpunkter kommer variabeln att fungera som en utjämningsparameter vilket också ger en större variation.

Vidare har bivillkoret: "Investeringsmål" en central roll. Som tidigare nämnts defineras bivillkoret som medelvärdet av portföljen varje tidpunkt och som ska vara större än, eller lika med valet av marginal. Sätter man exempelvis marginalen i kapitel 7.4 till 80 eller mer, kommer detta att resultera i en icke uppnåbar lösning. Kraven man ställer på marginalen förutsätter att det finns slumpningar sådana att målen kan uppnås. Vidare är bivillkoret formulerat sådant att investeringsmålet ska uppnås vid tidshorisonten med en linjär tillväxt av medelportföljen. Detta påverkar delvis portföljallokeringen med en något högre riskexponering vid tiden noll och en avtagande riskexponering med ökande tidsperioder. Det kan diskuteras hur detta bivillkor ska formuleras för att bättre anpassas för en jämnare allokering över tidsperioderna, eller huruvida man bör formulera om optimeringsmodellen så att portföljallokeringen är lika över alla tidsperioder. Problemet är dock anpassat för att svara upp mot Svenska kyrkans önskemål.

Vid tidpunkt noll får man information om vilket optimalt portföljbeslut man enligt modellen bör ta vid utgångspunkten (idag). Modellen är en simulering och presenterar resultat och risker som bygger på förenklingar av verkligheten. Pga. detta kommer man förslagsvis att göra om simuleringen efter att exempelvis en tidsperiod har passerat då förutsättningarna kan skilja sig från resultaten som modellen genererar idag. Modellen genererar ett portföljbeslutet vid tiden $t=0$ som grundar sig på en potentiell utveckling fram till tiden T .

Referenser

- [1] Adler, J. (2008 24 Januari). FI:s Pensionsbolagen klarar finanskrisen. *Dagens Industri*. 01-2008 på <http://di.se/Nyheter/?page=/Avdelningar/Artikel.aspx%3FMobious%3DY%26ArticleID%3D2008%255C01%255C24%255C266883%26SectionID%3DEttan%26menusection%3DStartsidan%3BHuvudnyheter>.
- [2] Bingham, N. H. & Kiesel, R. (1998). *Risk-Neutral Valuation. Pricing and Hedging of Financial Derivatives*. London: University of London.
- [3] Bogentoft, E., Romeijn, H. E., & Uryasev, S. (2001). *Asset/liability management for pensionfunds using CVaR constaints*. (Research Report 2001-10), ISE Dept., University of Florida.
- [4] Brealey, R. A., Myers, S. C. & Allen, F. (2006). *Corporate Finance eighth edition*, (sid 189-197). New York: McGraw-Hill international edition.
- [5] Crofts, M. (2005 20 Juni). FI:s tillsynsmodell möter kritik. *Dagens Nyheter*. 09-2007 på www.dn.se/DNet/jsp/polopoly.jsp?d=678&a=430662.
- [6] Euro 10Y-bond interest rate. *Riksgäldskontoret*. 10-2007.
- [7] Fastighetsprisindex. *Statistiska centralbyrån*.(2007). 10-2007 på www.scb.se/templates/tableOrChart____74160.asp.
- [8] Gentle, J. E. (1998). "Cholesky Factorization," §3.2.2 i *Numerical Linear Applications in Statistics*, (sid. 93-95). Berlin:Springer-Verlag.
- [9] Haugh, M. (2004). *The Monte Carlo Framework, examples from finance and generating correlated random variables*. Department of Industrial Engineering & Operations Research, Columbia Univerity.
- [10] Jönsson, P. (2006, Augusti). *MATLAB–beräkningar inom teknik och naturvetenskap*. Stockholm: Studentlitteratur AB.
- [11] Makhorin, A. (2006, Januari). *Modeling Language GNU MathProg Version 4.9*. Department for Applied Informatics, Moscow Aviation Institute.
- [12] MSCI World. *SIX Trust AB*. 10-2007.
- [13] OMX Stockholm 30. *SIX Trust AB*. 10-2007.
- [14] Palmquist, J., Uryasev, S. & Krokmal, P. (1999). *Portfolio Optimization with Conditional Value-at-Risk Objective and Constraints*. (Research Report 1999-4), ISE Dept., University of Florida.

- [15] Skingsley, C. (2005 27 Oktober). Alecta: Trafikljusen hot mot spararna. *Dagens Industri*. 09-2007 på http://di.se/Nyheter/?page=/Artiklar/Alecta__Trafikljusen_hot_mot_spararna.aspx%3FArticleID%3D2005%255C10%255C27%255C162511%26words%3D%26SectionID%3DPrivatekonomi%26menusection%3DPrivatekonomi%3BPrivatNyheter.
- [16] Sweden 10Y (1049). *Riksgäldskontoret*. 10-2007.
- [17] Trafikljusmodellen. *Finansinspektionen*. (2008). 08-2007 på www.fi.se/Templates/ListPage____5940.aspx.

Appendix

A.1 Matlab programmeringskod

```
function Optimera(I,T,Tillgang,Skuld,rskuld,Marginal,Beta);
Skapa_slumpmatriser(I,T,Tillgang,Skuld,rskuld,Marginal,Beta);
GLPK_optimizer;
Skapa_resultat;

function Skapa_slumpmatriser(I,T,Tillgang,Skuld,rskuld,Marginal,Beta);
[serie,N,ry]=Tidserier;
[Parametrar]=Parametermatris(N,I,T,Tillgang,Skuld,rskuld,Marginal,Beta,ry);
[GLPK]=Slumpning(serie,I,T,Tillgang,Skuld,rskuld,Marginal,Beta,ry);
Formateratext(Parametrar,GLPK,N,I,T);

function [serie,N,ry]=Tidserier;
FPI=[274 293 315 343 359 375 396 410 459 483 520];
MCSIworld=[820.36 937.66 1148.2 1419.2 1221.3 1008 789.43 1032.3 1170 1257.8
1483.6];
omxs30=[469.29 599.71 701.31 1199 1056.1 846.49 493.2 636.29 741.88 960.01
1147.3];
OBL.EMU=[114.6234 120.8819 125.6567 132.3221 138.949 145.8392 152.2656
158.8983 164.7605 170.3772 176.8585];
OBL.SEK=[115.749 122.6592 127.7741 135.0956 141.641 149.2258 156.2544 163.7233
170.3132 175.9932 182.2849];
serie.data=[FPI;MCSIworld;omxs30;OBL.SEK;OBL.EMU];
serie.namn={'Fastighet' 'MCSIworld' 'OMXS(30)' 'Sv. obl.' 'EMU. obl.'};
[N, Tdata]=size(serie.data);
ry=0.01;

function
[Parametrar]=Parametermatris(N,I,T,Tillgang,Skuld,rskuld,Marginal,Beta,ry);
Parametrar(1).namn='N';
Parametrar(1).antal=N;
Parametrar(2).namn='I';
Parametrar(2).antal=I;
Parametrar(3).namn='T';
Parametrar(3).antal=T;
Parametrar(4).namn='Tillgang';
Parametrar(4).antal=Tillgang;
Parametrar(5).namn='Skuld';
Parametrar(5).antal=Skuld;
Parametrar(6).namn='rskuld';
Parametrar(6).antal=rskuld;
Parametrar(7).namn='Marginal';
Parametrar(7).antal=Marginal;
Parametrar(8).namn='Beta';
Parametrar(8).antal=Beta;
Parametrar(9).namn='ry';
Parametrar(9).antal=ry;

function [GLPK]=Slumpning(serie,I,T,Tillgang,Skuld,rskuld,Marginal,Beta,ry);
[N Tdata]=size(serie.data);
for n=1:N
    for tdata=1:Tdata-1
```



```

cd('c:\Program\MATLAB701\work');

function Skapa_resultat;

load c:\program\gnuwin32\bin\test.txt;
N=test(1,1);
I=test(1,2);
T=test(1,3);
Tillgang=test(1,4);
Skuld=test(1,5);
rskuld=test(1,6);
Marginal=test(1,7);
Beta=test(1,8);
Utveckling(1:T,1:6)=test(2:T+1,1:6);
Xmatris(1:T,1:N)=test(T+2:2*T+1,1:N);
Summa=sum(Xmatris');
for t=1:T
    Andelar(t,1:N)=Xmatris(t,1:N)/Summa(t);
end;
Slump(1:I,1:T-1)=test(2*T+2:2*T+1+I,1:T-1);

[serie,N,ry]=Tidserier;
[Parametrar]=Parametermatris(N,I,T,Tillgang,Skuld,rskuld,Marginal,Beta,ry);

Tid=0:1:T-1;
plot(Tid,Utveckling,'LineWidth',2);
set(gca,'XLim',[0 T-1]);
xlabel(gca,'Tid (år)');
ylabel(gca,'Tillgångar (SEK)');
title(gca,'Utveckling av portfölj');
legend(gca,'Max. portfölj','Medel portfölj','Skuld','VaR','CVaR','Min.
portfölj',0);
saveas(gcf,'c:\program\gnuwin32\bin\grafer\Utveckling.jpg');

bar(Tid,Andelar,0.5,'stack');
set(gca,'XLim',[-1 T]);
set(gca,'YLim',[0 2]);
set(gca,'YTickLabel','0|0.2|0.4|0.6|0.8|1| | | | |');
xlabel(gca,'Tid (år)');
ylabel(gca,'Procent förvalt i värdepapper');
title(gca,'Portfölj allokering');
legend(gca,char(serie.namn(1:N)),0);
saveas(gca,'c:\program\gnuwin32\bin\grafer\Andelar.jpg');

[mu,sigma]=normfit(Slump(1:I,1));
normspec([Utveckling(2,4) Utveckling(2,5)],mu,sigma);
xlabel('Tillgångar (SEK)');
ylabel('Sannolikhet');
title(gca,'Normalfördelning efter 1 år');
saveas(gca,'c:\program\gnuwin32\bin\grafer\Fordelning1.jpg');

```

A.2 GLPK programmeringskod

```
param N;
param I;
param T;
param Tillgang;
param Skuld;

param Beta;
param rskuld;
param ry;
param Marginal;
param r{n in 1..N, i in 1..I, t in 1..T};

var alfa{t in 1..T};
var z{i in 1..I, t in 1..T} >=0;
var w{t in 1..T};
var x{n in 1..N, t in 0..T} >=0;
var y{i in 1..I, t in 0..T};

var ymax{t in 1..T};
var ymin{t in 1..T};
var maxport{t in 1..T};
var medelport{t in 1..T};
var minport{t in 1..T};

minimize malfunktion : (sum{t in 1..T}w[t])/T;

s.t. Tillgangar0 :
sum{n in 1..N} x[n,0] = Tillgang;

s.t. Ytiden0{i in 1..I} :
y[i,0] = 0;

s.t. BegransnigFastigheter{t in 0..T} :
x[1,t] <= 0.1*(sum{n in 1..N}x[n,t]);

s.t. Forlustfunktion{t in 1..T, i in 1..I} :
rskuld*Skuld - sum{n in 1..N} ((1+r[n,i,t]-ry)*x[n,t-1]) - (1+ry)*y[i,t-1] - alfa[t] <= z[i,t];

s.t. CVaR{t in 1..T} :
alfa[t] + (sum{i in 1..I}z[i,t]) / (I*(1 - Beta)) <= w[t];
```


s.t. Jamvikt{t in 1..T, i in 1..I} :
$$\sum\{n \text{ in } 1..N\} (x[n,t] - (1 + r[n,i,t])*x[n,t-1]) + y[i,t] - (1+ry)*y[i,t-1] = -(rskuld)*Skuld;$$

s.t. Riskreglering{t in 1..T} :
$$(\sum\{i \text{ in } 1..I\} y[i,t]) / I \geq \text{Marginal}*(t/T);$$

s.t. Tillvaxt{t in 1..T} :
$$\sum\{n \text{ in } 1..N\} (x[n,t]) \geq \text{Tillgang};$$

/*Ekvationerna nedan är endast till för presentationen av resultat, dvs för att lättare tolka svaren,
och de påverkar INTE optimeringen. */

s.t. Maxy{i in 1..I, t in 1..T} : $y_{\max}[t] \geq y[i,t];$

s.t. Miny{i in 1..I, t in 1..T} : $y_{\min}[t] \leq y[i,t];$

s.t. MaxPortTillvaxt{t in 1..T} : $\text{maxport}[t] = \sum\{n \text{ in } 1..N\} (x[n,t-1]) + y_{\max}[t];$

s.t. MedelPortTillvaxt{t in 1..T} : $\text{medelport}[t] = \sum\{n \text{ in } 1..N\} (x[n,t-1]) + ((\sum\{i \text{ in } 1..I\} y[i,t])/I);$

s.t. MinPortTillvaxt{t in 1..T} : $\text{minport}[t] = \sum\{n \text{ in } 1..N\} (x[n,t-1]) + y_{\min}[t];$

solve;

```
printf : "% f % f % f % f % f % f % f % f % f",N,I,T,Tillgang,Skuld,rskuld,Marginal,Beta;printf{a in
9..T-1} : "% f ",a;printf : "\n";
printf : "% f % f % f % f % f % f % f % f % f",sum{n in 1..N}x[n,0],
sum{n in 1..N}x[n,0],Skuld,sum{n in 1..N}x[n,0],sum{n in 1..N}x[n,0],
sum{n in 1..N}x[n,0],7,8;printf{a in 9..T-1} : "% f ",a;printf : "\n";
for {t in 1..T-1}
    {printf : "% f % f % f % f % f % f % f % f % f",maxport[t],medelport[t],Skuld,-alfa[t],-
w[t],minport[t],7,8;printf{a in 9..T-1} : "% f ",a;printf : "\n";}
for {t in 0..T-1}
    {printf{n in 1..N} : "% f ",x[n,t];printf{a in N+1..8} : "% f ",a;
printf{b in 9..T-1} : "% f ",b;printf : "\n";}
for {i in 1..I}
    {printf{t in 1..T-1} : "% f ",sum{n in 1..N}(x[n,t])+y[i,t];
printf{a in T..8} : "% f ",a;printf : "\n";}
end;
```

