NADA, KTH, Lennart Edsberg

Tentamen i Kursen SF1536
Simulering med Differentialekvationer
Hemtenta 22/1 kl 9 - 24/1 kl 15, 2014

Skriftliga hjälpmedel tillåtna.
Samarbete med kurskamrater, äldre teknologer e.d. EJ tillåtet.

Lämna individuella skriftliga svar till studentexpeditionen Matematik senast 24/1 kl 15.

För godkänt krävs preliminärt 15 p av 30 möjliga.

0. Jag intygar på heder och samvete att jag löst alla uppgifter själv och ej tagit hjälp av andra personer.

Namn+personnummer:

1. Givet följande ODE-system, som beskriver två elektriska strömmar $i_1(t)$ och $i_2(t)$ i ett elektriskt nätverk bestående av en spänningskälla E, två resistanser R_1, R_2 och två induktanser L_1, L_2.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_1/L_1 & -R_1/L_1 \\ -R_1/L_2 & -(R_1+R_2)/L_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E/L_1 \\ E/L_2 \end{pmatrix}$$

a) (4) Antag att $E = 60[V]$, $R_1 = 2[\Omega]$, $R_2 = 3[\Omega]$, $L_1 = 1[h]$, $L_2 = 1[h]$ samt $i_1(0) = 0$ och $i_2(0) = 0$. Bestäm de två strömmarna $i_1(t)$ och $i_2(t)$ som funktion av tiden.

b) (2) Vad blir steady-state lösningen, dvs den lösning som erhålles då $t \to \infty$?.

2. Givet följande värmeledningsproblem:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u(0,t) = T_0, \quad u(L,t) = T_L, \qquad u(x,0) = T_0$$

Problemet motsvarar en modell, där temperaturen $u(x,t)$ i en lång stav först är T_0 i hela staven. Vid tiden $t = 0$ blir sänks temperaturen i stavens ena ändpunkt $x = L$ till $u(L,t) = T_L$, där $T_L < T_0$. Temperaturen i andra ändpunkten $x = 0$ bibehålles dock till $u(0,t) = T_0$.

a) (2) Genom transformationen

$$u(x,t) = v(x,t) + T_0 + \frac{T_L - T_0}{L}x$$

införs en ny funktion $v(x,t)$. Visa att denna funktion satisfierar den givna PDE'n. Visa också att randvillkor och begynnelsevillkor för $v(x,t)$ blir

$$v(0,t) = 0, \quad v(L,t) = 0, \qquad v(x,0) = \frac{T_0 - T_L}{L}x$$

b) (6) Bestäm lösningen $v(x,t)$ i a) med variabelseparation. När den är bestämd (som en oändlig serie) ange vad $u(x,t)$ blir.

c) (2) Vad är steady-state lösningen $u_\infty(x)$ till $u(x,t)$, dvs vilken lösning går $u(x,t)$ mot då $t \to \infty$?

3. En period av en fyrkantsvåg beskrivs av funktionen

$$f(t) = -1, \quad -\pi < t < 0, \qquad f(t) = +1, \quad 0 < t < \pi$$

Börja med att rita upp hur denna periodiska funktion uppför sig över några perioder.

a) (6) Beräkna Fourierserien för den periodiska funktionen $f(t)$.

b) (2) Antag att $f(t)$, skriven som Fourierserie, är drivande funktion i ett mekaniskt system som beskrivs av Newtons kraftekvation

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = f(t)$$

Bestäm först en partikulärlösning till denna ODE. Bestäm sedan allmänna lösningen.

4) (6) I kompendiet "Tillämpade Numeriska Metoder" av Gerd Eriksson beskrivs i kapitel 12 den Diskreta Fouriertransformen, DFT. I ett exempel i avsnitt 12.1.1 är sex datapunkter $(t_i, y_i), i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ givna. I samma avsnitt beskrivs hur ett trigonometriskt polynom innehållande sex koefficienter (formel (64)) interpoleras till givna mätdata.
I avsnitt 12.2 görs samma sak, men med en komplex ansats av det trigonometriska polynomet, se formel (67) och (68), där Y_k är de sökta komplexa koefficienterna. Skriv dessa formler som ett linjärt ekvationssystem

$$C\mathbf{Y} = \mathbf{y}$$

dvs ange matrisen C och högerledet y i detta ekvationssystem för fallet med de sex datavärdena givna i avsnitt 12.1.1.
Lös ekvationssystemet genom att först multiplicera bägge led med C^H, som är den till C hermiteska konjugatet, dvs

$$(C^H)_{ij} = \bar{C}_{ji}$$

För exempel se Wikipedia under Hermiteskt konjugat. Ekvationssystemet blir nu

$$C^H C\mathbf{Y} = C^H\mathbf{y}$$

Om du gjort rätt blir matrisen $C^H C$ diagonal med reella element. Lös nu ekvationssystemet. Kontrollera med den lösning som står i kompendiet sid 120.