NADA, KTH, Lennart Edsberg

**Tentamen i Kursen SF1536**
**Simulering med Differentialekvationer**
Hemtenta 2/5 kl 10 - 5/5 kl 10, 2014

Skriftliga hjälpmedel tillåtna.
Samarbete med kurskamrater, äldre teknologer e.d. EJ tillåtet.

Lämna individuella skriftliga svar till studentexpeditionen Matematik senast 5/5 kl 10.

För godkänt krävs preliminärt 15 p av 30 möjliga.

**0.** Jag intygar på heder och samvete att jag löst alla uppgifter själv och ej tagit hjälp av andra personer.

Namn+personnummer:

**1.** Givet följande ODE-system, som beskriver hastigheten $(u, v)$ hos en partikel som startar i origo med utgångshastigheten $a$ och utgångsvinkeln $\varphi$

$$m\frac{du}{dt} + cu = 0,\ u(0) = acos(\varphi), \qquad m\frac{dv}{dt} + cv = -mg,\ v(0) = asin(\varphi) \tag{1}$$

I ODE-systemet (1) är $m$ partikelns massa, $c$ en luftmotståndskoefficient och $g$ tyngdaccelerationen.

**a)** (2) Inför kolumnvektorn $\mathbf{z} = (u, v)^T$. Skriv ODE-systemet (1) på formen

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = A\mathbf{z} + \mathbf{b},\ \mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0 \tag{2}$$

Ange komponenterna i matrisen $A$ och vektorerna $\mathbf{b}$ och $\mathbf{z}_0$.

**b)** (3) Lösningen till ODE-systemet (2) kan skrivas

$$\mathbf{z}(t) = e^{At}\mathbf{z}_0 + A^{-1}(e^{At} - I)\mathbf{b} \tag{3}$$

Visa att (3) satisfierar (2).

**c)** (4) Ange lösningen till (1) med användande av formeln (3). Svaret ska ges på komponentform, dvs ange vad $u(t)$ och $v(t)$ blir.

**2.** Givet följande värmeledningsproblem:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0, \qquad u(x,0) = 1,\ 0 < x < 1/2, \quad u(x,0) = 0,\ 1/2 < x < 1$$

**a)** (6) Bestäm lösningen $u(x, t)$ med variabelseparation. Ange den oändliga serie som metoden ger upphov till.

**c)** (2) Vad är steady-state lösningen $u_\infty(x)$ till $u(x,t)$, dvs vilken lösning går $u(x,t)$ mot då $t \to \infty$?

**3.** Givet följande periodiska funktion $f(t)$ som på en period ges av

$$f(t) = 0, \quad -\pi < t < 0, \qquad f(t) = t^2, \quad 0 < t < \pi$$

Börja med att rita upp hur denna periodiska funktion uppför sig över några perioder.

**a)** (6) Visa att Fourierserien för den periodiska funktionen $f(t)$ blir

$$f(t) = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{2(-1)^n}{n^2}cos(nt) + (\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n} + \frac{2}{\pi n^3}[(-1)^n - 1])sin(nt)\}$$

**b)** (2) Använd resultatet i a) till att visa att

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

**4)** (5) I kompendiet "Tillämpade Numeriska Metoder" av Gerd Eriksson beskrivs i kapitel 12 den Diskreta Fouriertransformen, DFT. I ett exempel i avsnitt 12.1.1 är sex datapunkter $(t_i, y_i), i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ givna. I samma avsnitt beskrivs hur ett trigonometriskt polynom innehållande sex koefficienter (formel (64)) interpoleras till givna mätdata.
I avsnitt 12.2 görs samma sak, men med en komplex ansats av det trigonometriska polynomet, se formel (67) och (68), där $Y_k$ är de sökta komplexa koefficienterna. Skriv dessa formler som ett linjärt ekvationssystem

$$C\mathbf{Y} = \mathbf{y}$$

dvs ange matrisen $C$ och högerledet $y$ i detta ekvationssystem för fallet med de sex datavärdena givna i avsnitt 12.1.1.
Lös ekvationssystemet genom att först multiplicera bägge led med $C^H$, som är den till $C$ hermiteska konjugatet, dvs

$$(C^H)_{ij} = \bar{C}_{ji}$$

För exempel se Wikipedia under Hermiteskt konjugat. Ekvationssystemet blir nu

$$C^H C\mathbf{Y} = C^H\mathbf{y}$$

Om du gjort rätt blir matrisen $C^H C$ diagonal med reella element. Lös nu ekvationssystemet. Kontrollera med den lösning som står i kompendiet sid 120.