KTH Matematik

Tentamen del 1
SF1511, 2017-03-16, kl 8.00-11.00,
Numeriska metoder och grundläggande programmering

Namn: ....

Personnummer:.. **Program och årskurs:** ....

Bonuspoäng. Ange dina bonuspoäng från kursomgången HT16-VT17 här:

Max antal poäng på denna del är 20. Gränsen för godkänt/betyg E är 14 poäng (inklusive bonuspoäng). Endast ett korrekt svar per uppgift. Om denna del av tentamen (del 1) blir godkänd så rättas även del 2, vilket ger möjlighet till högre betyg.

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).
Skriv svaren på dessa papper. Skriv namn på varje sida.

(2p) **1.** Givet ekvationen $-0.8x^3 + 0.8x + 0.05 = 0$ har de tre rötterna $\alpha_1 \approx -1$, $\alpha_2 \approx 0$ och $\alpha_3 \approx 1$. Ekvationen skrivs om och en fixpunktsmetod används:

$$x_{n+1} = -0.8x_n^3 + 1.8x_n + 0.05,$$

där startgissningen x_0 är given. Vilken eller vilka av rötterna konvergerar denna fixpunktsmetod mot?

- ☐ Ingen
- ☐ Endast α_2
- ☐ Endast α_1 och α_2
- ☐ Endast α_2 och α_3
- ☐ Endast α_1
- ☐ Endast α_3
- ☐ Endast α_1 och α_3
- ☐ α_1, α_2 och α_3

(2p) **2.** Ekvationen $x^3+2 = 4x$ har en rot mellan 0 och 1. En iteration med Newtons metod och startgissning $x_0 = 0$ ger x_1 lika med:

- ☐ -1/4
- ☐ 0
- ☐ 1/8
- ☐ 1/4
- ☐ 1/3
- ☐ 1/2
- ☐ 1
- ☐ 2

Var god vänd

3. Funktionen $y = c_1 \tan(x) + c_2 x^2$ ska, med minsta kvadratmetoden, anpassas till mätpunkterna

x	1	2	3	4
y	1	3	9	15

Det leder till det överbestämda ekvationssystemet $A\mathbf{c} \approx \mathbf{y}$ där kolumnvektorn $\mathbf{c}$ ska bestämmas.

(1p) **a.** Vilken dimension får matrisen A (rader $\times$ kolumner)?

☐ 2×2 ☐ 2×4 ☐ 4×2

☐ 2×3 ☐ 4×1 ☐ 4×4

(1p) **b.** Vilken dimension får matrisen i normalekvationerna?

☐ 2×2 ☐ 2×4 ☐ 4×2

☐ 2×3 ☐ 3×3 ☐ 4×4

(2p) **4.** Ett icke-linjärt ekvationssystem

$$x + y^2 = 10, \quad x^2 - y = 0.01$$

har lösts med Newtons metod för system i Matlab. Programmet som användes genererar följande utskrift

```
1.5729    2.1357    1.2720    1.2720     1.2720
1.6780    2.7946    0.6672    0.5246     0.4124
1.6937    2.8582    0.0655    0.0982     0.1471
1.6983    2.8741    0.0165    0.2524     3.8526
1.6997    2.8789    0.0050    0.2998    18.1333
1.7001    2.8803    0.0015    0.3029    61.1165
```

Den Matlab-kod som användes för problemet ovan var

```
format compact                                   %1-radnummer
fx=@(x,y) [x+y^2-10; x^2-y-0.01];                %2
Jf=@(x,y) [10 2*y; 2*x -1];                      %3
x=1; y=1; h=1;                                   %4
while norm(h)>2E-3                               %5
    f=fx(x,y); J=Jf(x,y);                        %6
    hold=h; h=-J\f;                              %7
    x=x+h(1);y=y+h(2);                           %8
    disp([x y norm(h) norm(h)/norm(hold) norm(h)/norm(hold)^2])
end
```

Matlabprogrammet innehåller ett fel som gör att Newtons metod konvergerar långsamt. Felet finns på rad

☐ 8 ☐ 7 ☐ 6 ☐ 5 ☐ 4 ☐ 3 ☐ 2

Tentamen fortsätter på nästa blad

5. Differentialekvationen

$$\frac{dy}{dt} = t^2 + y, \qquad y(0) = \frac{1}{2},$$

löses med Framåt Euler och steglängd $h = 0.5$.

(1p) **a.** Vad blir approximationen till $y(0.5)$?

☐ 0 ☐ 1/2 ☐ 3/4 ☐ 1 ☐ 5/4

(1p) **b.** Vad blir approximationen till $y(1)$?

☐ 1/4 ☐ 1/2 ☐ 1 ☐ 9/8 ☐ 5/4

(2p) **6.** För en funktion har man mätt upp följande värden

t	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$f(t)$	2	3	4	3	2

Man använder trapetsregeln för att approximera integralen

$$\int_{0.2}^{0.6} f(t)dt,$$

med samtliga de givna funktionsvärdena. Vad blir approximationen?

☐ 12 ☐ 1.6 ☐ 1.44 ☐ 1.36 ☐ 1.2 ☐ 1.0

(2p) **7.** Givet följande ekvation, där vi vill beräkna roten $x = \alpha$,

$$\int_0^x e^{-t^2} dt + x^2 - 1 = 0$$

Vilka numeriska metoder är lämpliga att kombinera för att lösa problemet?

☐ Trapetsregeln och interpolation
☐ Framåt Euler och extrapolation
☐ Trapetsregeln och Newtons metod
☐ Minsta kvadratmetoden och Framåt Euler
☐ Runge-Kutta 4 och trapetsregeln
☐ Runge-Kutta 4 och interpolation

Var god vänd

(2p) **8.** Vi vill beräkna $z = \sin(x + y)$ när x och y har felgränserna E_x och E_y, som båda är små. Vad kan vi säga om den resulterande felgränsen E_z i z?

☐ $E_z \approx \sin(x + y)(E_x + E_y)$

☐ $E_z \approx E_x + E_y$

☐ $E_z \approx |\cos(x + y)E_x - \sin(x + y)E_y|$

☐ $E_z \approx |\cos(x + y)E_x + \sin(x + y)E_y|$

☐ $E_z \approx |\cos(x + y)|(E_x + E_y)$

☐ $E_z \approx |\sin(E_x + E_y)|$

☐ $E_z \approx |\sin(x + y)|(E_x + E_y)$

☐ $E_z \approx |\cos(E_x + E_y)|$

9. Givet tabellen nedan med några värden på funktionen $y(x)$,

x	2	3	5	7	9
$y(x)$	3	-5	5	-7	2

(1p) **a.** Skatta $y(4)$ med styckvis linjär interpolation.

☐ -7.0 ☐ -5.5 ☐ -3.0 ☐ -1.5

☐ 0.0 ☐ 2.5 ☐ 4.5 ☐ 6.0

(1p) **b.** Om man vill lägga ett interpolationspolynom genom alla punkterna i tabellen, vilket är det lägsta gradtal man kan använda då?

☐ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3

☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7

(2p) **10.** Antag att du approximerat integralen

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx,$$

med trapetsregeln med steglängd h och uppskattat felet till $e_h \approx 10^{-2}$. Om du vill minska felet med en faktor 100 till $e_h \approx 10^{-4}$, hur bör du välja din steglängd?

☐ $h/3$ ☐ $h/5$ ☐ $h/10$ ☐ $h/20$ ☐ $h/50$ ☐ $h/100$