

Tentamen del 2

SF1511, 2018-03-16, kl 8.00-11.00,

Numeriska metoder och grundläggande programmering

Del 2, Max 50p + bonuspoäng (max 4p).

Rättas endast om del 1 är godkänd.

Betygsgränser inkl bonuspoäng: 10p D, 20p C, 30p B, 40p A.

Svar skall motiveras och uträkningar redovisas. Korrekt svar utan motivering eller med felaktig motivering medför poängavdrag.

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

P1. Vi vill hitta lösningen (x, y, z) till följande icke-linjära system av ekvationer

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 - 2x + y^2 - z + 1 \\ xy^2 - x - 3y + yz + 2 \\ xz^2 - 3z + yz^2 + xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (3 p) a) Beräkna Jakobian-matrisen till funktionen $F(x, y, z)$ för hand.
- (3 p) b) När Newtons metod för system används för att lösa systemet får man felen e_k efter iteration k , enligt följande tabell

k	1	2	3
e_k	0.2	0.04	$1.6 \cdot 10^{-3}$

Efter hur många ytterligare iterationer kommer felet bli mindre än 10^{-5} ? Motivera ditt svar noga!

- (8 p) c) Skriv ett MATLAB-program som löser $F(x, y, z) = 0$ med Newtons metod för system. Svaret ska ha ett fel som är mindre än 10^{-10} i alla komponenter. En bra startgissning är $(x, y, z) = (2, 0, 1)$.
- (3 p) d) Betrakta nu ekvationssystemet

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 - 2x + y^2 - z + 1 \\ xy^2 - x - 3y + yz + 2 \\ xz^2 - 3z + yz^2 + xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

där $a = 0.1 \pm 0.1$, $b = -0.1 \pm 0.05$ och $c = \pm 0.2$. Skriv ett MATLAB-program som uppskattar osäkerheten i lösningens x -komponent. Utgå från programmet i deluppgift (c) och förklara vad som behöver läggas till/modifieras. Programmet skall vara effektivt för full poäng.

Var god vänd

P2. Vi vill beräkna $y(t)$ som satisfierar den ordinära differentialekvationen

$$y''' + 3y' - 2e^{-y} + t^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1, \quad y''(0) = 1.$$

- (3 p) **a.** Inför lämpliga beteckningar och skriv ekvationen som ett system av första ordningens differentialekvationer. Glöm inte begynnelsevillkoren!
- (8 p) **b.** Skriv en detaljerad algoritm i MATLAB som beräknar $y(t)$ fram till $t = 5$ och plottar lösningen. Algoritmen ska vara baserad på Framåt Euler-metoden.
- (7 p) **c.** Utöka MATLAB-programmet så att det beräknar båglängden L av $y(t)$ i intervallet $t \in [0, 5]$. Båglängden ges av

$$L = \int_0^5 \sqrt{1 + y'(t)^2} dt.$$

MATLABs inbyggda funktioner för integration får ej användas här.

- (2 p) **d.** Beskriv hur man kan gå tillväga för att uppskatta tillförlitligheten i approximationen av L .

P3. Du vill beräkna derivatan av en snäll funktion $f(x)$. Du känner inte till dess precisa form, men har tillgång till en MATLAB-funktion med funktionshuvud

```
function f=func(x)
```

som givet x ger dig $f(x)$. Du har också tillgång till en funktion i MATLAB där en numerisk metod för att approximera $f'(x)$ finns implementerad. Den har funktionshuvudet:

```
function Dh=numder(x,h)
```

där h är en steglängd och x punkten där man vill approximera derivatan. Till exempel kan differensapproximationen

$$D(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1}$$

vara implementerad i `numder`.

- (5 p) **a.** Visa att differensapproximationen i (1) minst har noggrannhetsordning ett.
- (5 p) **b.** Du vill veta vad den numeriska metoden som är implementerad i `numder` har för noggrannhetsordning. Tyvärr är funktionen `numder` dåligt kommenterad. Förklara hur du skulle gå till väga för att bestämma noggrannhetsordningen genom numeriska experiment. Motivera ditt svar.
- (3 p) **c.** Skriv en egen version av `numder` i MATLAB som approximerar $f'(x)$ med en noggrannhetsordning som är minst två. Du behöver inte bevisa ordningen.