KTH Matematik

# Tentamen del 1
# SF1511, 2018-06-05, kl 8.00-11.00,
## Numeriska metoder och grundläggande programmering

**Namn:** ..............................................................................................................

**Personnummer:**.......................................... **Program och årskurs:** ...............

**Bonuspoäng.** Ange dina bonuspoäng från kursomgången HT17-VT18 här:

Max antal poäng på denna del är 20. Gränsen för godkänt/betyg E är 14 poäng (inklusive bonuspoäng). Ange endast ett svar per uppgift. Om denna del av tentamen (del 1) blir godkänd så rättas även del 2, vilket ger möjlighet till högre betyg.

**Inga hjälpmedel är tillåtna** (ej heller miniräknare).
Skriv svaren på dessa papper. Skriv namn på varje sida.

(3 p) **1.** Modellen $y(x) = \frac{\alpha}{x} + 2\beta x$ ska anpassas till punkterna i tabellen nedan i minstakvadratmening.

| $x$ | -1 | 1/2 | 1 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 1 | $-1$ |

Det leder till det överbestämda ekvationssystemet $A\mathbf{c} \approx \mathbf{y}$ där kolumnvektorn $\mathbf{c}$ ska bestämmas.

Vad blir $\alpha$ och $\beta$?

- ☐ $\alpha = 5/2$ och $\beta = 5/2$
- ☐ $\alpha = 1/2$ och $\beta = 1/2$
- ☐ $\alpha = -1$ och $\beta = 3/4$
- ☐ $\alpha = 0$ och $\beta = 0$
- ☐ $\alpha = 1$ och $\beta = -1$
- ☐ $\alpha = -2$ och $\beta = 1/2$
- ☐ $\alpha = 1$ och $\beta = 0$
- ☐ $\alpha = 2$ och $\beta = -1$

**Var god vänd**

(2 p) **2.** Integralen

$$\int_0^1 \frac{(\cos(\pi x)+1)}{2x+1}dx$$

approximeras med trapetsregeln. Vad blir det approximativa värdet om steglängden är $h = 0.5$?

☐ 0 ☐ 1/2 ☐ 3/4 ☐ 5/4 ☐ 2 ☐ 5/2 ☐ 3

**3.** Differentialekvationen

$$y'' + \epsilon(t^2-1)y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

ska skrivas om som ett system av första ordningen.

(1 p) **(a)** Vilket av nedanstående system ger en korrekt omskrivning av differentialekvationen?

☐ $\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= -\epsilon(u_1^2-1)u_1 + u_2 \end{aligned}$

☐ $\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= -\epsilon(t^2-1)u_2' - u_1' \end{aligned}$

☐ $\begin{aligned} u_1' &= u_1 \\ u_2' &= -\epsilon(t^2-1)u_2 - u_1 \end{aligned}$

☐ $\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= -\epsilon(t^2-1)u_2 - u_1 \end{aligned}$

☐ $\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= u_3 \\ u_3' &= -\epsilon(u_1^2-1)u_3 - u_2 \end{aligned}$

☐ $\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= u_3 \\ u_3' &= -\epsilon(t^2-1)u_2 - u_3 \end{aligned}$

☐ $\begin{aligned} u_1' &= u_2 \\ u_2' &= u_3 \\ u_3' &= -\epsilon(t^2-1)u_3 - u_2 \end{aligned}$

☐ $\begin{aligned} u_1' &= u_1 \\ u_2' &= u_2 \\ u_3' &= -\epsilon(t^2-1)u_2 - u_3 \end{aligned}$

(1 p) **(b)** Vilket av nedanstående uppsättning begynnelsevillkor hör till rätt svar i deluppgift (a)?

☐ $\begin{aligned} u_1(0) &= 1 \\ u_2(0) &= 0 \\ u_3(0) &= 0 \end{aligned}$

☐ $\begin{aligned} u_1'(0) &= 1 \\ u_2''(0) &= 0 \end{aligned}$

☐ $\begin{aligned} u_1(1) &= 0 \\ u_2(0) &= 0 \end{aligned}$

☐ $\begin{aligned} u_1(0) &= 1 \\ u_2(0) &= 0 \end{aligned}$

☐ $\begin{aligned} u_1(0) &= 0 \\ u_2(0) &= 1 \\ u_3(0) &= 0 \end{aligned}$

☐ $\begin{aligned} u_1'(0) &= 1 \\ u_2'(0) &= 0 \end{aligned}$

☐ $\begin{aligned} u_1(1) &= 0 \\ u_2(0) &= 0 \\ u_3(0) &= 0 \end{aligned}$

☐ $\begin{aligned} u_1'(0) &= 1 \\ u_2'(0) &= 0 \\ u_3'(0) &= 0 \end{aligned}$

**Tentamen fortsätter på nästa blad**

(2 p) **4.** En numerisk kvadraturmetod har använts för att beräkna en integral. Tabellen nedan visar felet $e_h$ vid steglängd $h$

| $h$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{16}$ |
|---|---|---|---|---|
| $e_h$ | $4.02 \cdot 10^{-2}$ | $10^{-2}$ | $2.50 \cdot 10^{-3}$ | $6.25 \cdot 10^{-4}$ |

Vilken noggrannhetsordning har metoden?

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

(3 p) **5.** Begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} y'(t) &= \sin(y(t) + u(t))^{7/2} \qquad & y(0) &= 1 \\ u'(t) &= (t+1)y^2(t), & u(0) &= 1. \end{aligned}$$

löses med framåt Euler (explicit Euler) och steglängd $h = 0.5$. Vad blir approximationen till $u(0.5)$?

☐ $3/2$ ☐ $3$

☐ $\pi/4$ ☐ $-1$

☐ $\sin(2)^{7/2}$ ☐ $1 + \cos(2)$

☐ $1$ ☐ $0$

(2 p) **6.** Ekvationen $f(x) = x^2 - 4$ har en rot $x = 2$. Om man tar ett steg med Newton-Raphsons metod och $x_0 = 1$ blir $x_1$?

☐ $-1/2$ ☐ $1/2$ ☐ $3/2$ ☐ $5/2$

☐ $0$ ☐ $1$ ☐ $2$ ☐ $3$

**Var god vänd**

(2 p) **7.** Kastbanan för en boll beräknas med Runge–Kutta 4 där tidssteget är $\Delta t = 0.5$. Det ger nedanstående tids- och positionsvärden.

| Tid $t$ | 0.0 | 0.5 | 1.0 | 1.5 | 2.0 | 2.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$-pos | 0.0 | 7.7 | 11.7 | 14.6 | 16.8 | 18.3 |
| $y$-pos | 2.2 | 6.7 | 6.9 | 4.9 | 1.2 | -3.3 |

Använd (styckvis) linjär interpolation för att bestämma nedslagsplatsen (där $y = 0$). Nedslagsplatsens $x$-koordinat blir

☐ 16.8 ☐ 17.6

☐ 17.1 ☐ 17.8

☐ 17.2 ☐ 17.9

☐ 17.4 ☐ 18.3

(1 p) **8.** **(a)** Antag att vi har löst ett kvadratiskt linjärt ekvationssystem, $Ax = b$ med $N$ obekanta. Matrisen $A$ är en fylld matris så vi löser systemet med Gausselimination. Om antalet obekanta i systemet fördubblas ökar beräkningskostnaden med en faktor

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8

(1 p) **(b)** Antag att vi har löst ett kvadratiskt linjärt ekvationssystem, $Ax = b$ med $N$ obekanta. Matrisen $A$ är en triangulär matris så vi löser systemet med framåt- eller bakåtsubstitution. Om antalet obekanta i systemet fördubblas ökar beräkningskostnaden med en faktor

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8

(2 p) **9.** Randvärdesproblemet

$$y''(t) + y'(t) = 3, \qquad y(5) = 4, \qquad y(9) = 8$$

ska lösas med Finita DifferensMetoden. Andra ordningens differensapproximationer och steglängden $\Delta t = 2$ används.

Vad blir $y(7)$?

☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6 ☐ 7 ☐ 8 ☐ 9