

Tentamen del 1**SF1511, 2018-06-05, kl 8.00-11.00,**

Numeriska metoder och grundläggande programmering

Namn:

Personnummer:..... Program och årskurs:

Bonuspoäng. Ange dina bonuspoäng från kursomgången HT17-VT18 här:

Max antal poäng på denna del är 20. Gränsen för godkänt/betyg E är 14 poäng (inklusive bonuspoäng). Ange endast ett svar per uppgift. Om denna del av tentamen (del 1) blir godkänd så rättas även del 2, vilket ger möjlighet till högre betyg.

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

Skriv svaren på dessa papper. Skriv namn på varje sida.

- (3 p) 1. Modellen $y(x) = \frac{\alpha}{x} + 2\beta x$ ska anpassas till punkterna i tabellen nedan i minstakvadratmening.

x	-1	1/2	1
y	1	1	-1

Det leder till det överbestämda ekvationssystemet $A\mathbf{c} \approx \mathbf{y}$ där kolumnvektorn \mathbf{c} ska bestämmas.

Vad blir α och β ?

$\alpha = 5/2$ och $\beta = 5/2$

$\alpha = 1$ och $\beta = -1$

$\alpha = 1/2$ och $\beta = 1/2$

$\alpha = -2$ och $\beta = 1/2$

$\alpha = -1$ och $\beta = 3/4$

$\alpha = 1$ och $\beta = 0$

$\alpha = 0$ och $\beta = 0$

$\alpha = 2$ och $\beta = -1$

Var god vänd

(2 p) 2. Integralen

$$\int_0^1 \frac{\cos(\pi x) + 1}{2x + 1} dx$$

approximeras med trapetsregeln. Vad blir det approximativa värdet om steglängden är $h = 0.5$?

- 0 1/2 3/4 5/4 2 5/2 3

3. Differentialekvationen

$$y'' + \epsilon(t^2 - 1)y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

ska skrivas om som ett system av första ordningen.

(1 p) (a) Vilket av nedanstående system ger en korrekt omskrivning av differentialekvationen?

$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = -\epsilon(u_1^2 - 1)u_1 + u_2 \end{cases}$ $\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = -\epsilon(t^2 - 1)u_2 - u_1' \end{cases}$

$\begin{cases} u_1' = u_1 \\ u_2' = -\epsilon(t^2 - 1)u_2 - u_1 \end{cases}$ $\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = -\epsilon(t^2 - 1)u_2 - u_1 \end{cases}$

$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = u_3 \\ u_3' = -\epsilon(u_1^2 - 1)u_3 - u_2 \end{cases}$ $\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = u_3 \\ u_3' = -\epsilon(t^2 - 1)u_2 - u_3 \end{cases}$

$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = u_3 \\ u_3' = -\epsilon(t^2 - 1)u_3 - u_2 \end{cases}$ $\begin{cases} u_1' = u_1 \\ u_2' = u_2 \\ u_3' = -\epsilon(t^2 - 1)u_2 - u_3 \end{cases}$

(1 p) (b) Vilket av nedanstående uppsättning begynnelsevillkor hör till rätt svar i deluppgift (a)?

$\begin{cases} u_1(0) = 1 \\ u_2(0) = 0 \\ u_3(0) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} u_1'(0) = 1 \\ u_2''(0) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} u_1(0) = 1 \\ u_2(0) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} u_1(1) = 0 \\ u_2(0) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} u_1'(0) = 1 \\ u_2'(0) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} u_1(0) = 0 \\ u_2(0) = 1 \\ u_3(0) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} u_1(1) = 0 \\ u_2(0) = 0 \\ u_3(0) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} u_1'(0) = 1 \\ u_2'(0) = 0 \\ u_3'(0) = 0 \end{cases}$

Tentamen fortsätter på nästa blad

- (2 p) 4. En numerisk kvadraturmetod har använts för att beräkna en integral. Tabellen nedan visar felet e_h vid steglängd h

h	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
e_h	$4.02 \cdot 10^{-2}$	10^{-2}	$2.50 \cdot 10^{-3}$	$6.25 \cdot 10^{-4}$

Vilken noggrannhetsordning har metoden?

- 1 2 3 4 5 6

- (3 p) 5. Begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} y'(t) &= \sin(y(t) + u(t))^{7/2} & y(0) &= 1 \\ u'(t) &= (t + 1)y^2(t), & u(0) &= 1. \end{aligned}$$

löses med framåt Euler (explicit Euler) och steglängd $h = 0.5$. Vad blir approximationen till $u(0.5)$?

- $3/2$ 3
 $\pi/4$ -1
 $\sin(2)^{7/2}$ $1 + \cos(2)$
 1 0

- (2 p) 6. Ekvationen $f(x) = x^2 - 4$ har en rot $x = 2$. Om man tar ett steg med Newton-Raphsons metod och $x_0 = 1$ blir x_1 ?

- $-1/2$ $1/2$ $3/2$ $5/2$
 0 1 2 3

Var god vänd

- (2 p) 7. Kastbanan för en boll beräknas med Runge–Kutta 4 där tidssteget är $\Delta t = 0.5$. Det ger nedanstående tids- och positionsvärden.

Tid t	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5
x -pos	0.0	7.7	11.7	14.6	16.8	18.3
y -pos	2.2	6.7	6.9	4.9	1.2	-3.3

Använd (styckvis) linjär interpolation för att bestämma nedslagsplatsen (där $y = 0$). Nedslagsplatsens x -koordinat blir

- | | |
|--|-------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 16.8 | <input type="checkbox"/> 17.6 |
| <input type="checkbox"/> 17.1 | <input type="checkbox"/> 17.8 |
| <input checked="" type="checkbox"/> 17.2 | <input type="checkbox"/> 17.9 |
| <input type="checkbox"/> 17.4 | <input type="checkbox"/> 18.3 |

- (1 p) 8. (a) Antag att vi har löst ett kvadratisk linjärt ekvationssystem, $Ax = b$ med N obekanta. Matrisen A är en fylld matris så vi löser systemet med Gausselimination. Om antalet obekanta i systemet fördubblas ökar beräkningskostnaden med en faktor

- 1 2 3 4 6 7 8

- (1 p) (b) Antag att vi har löst ett kvadratisk linjärt ekvationssystem, $Ax = b$ med N obekanta. Matrisen A är en triangulär matris så vi löser systemet med framåt- eller bakåtsubstitution. Om antalet obekanta i systemet fördubblas ökar beräkningskostnaden med en faktor

- 1 2 3 4 6 7 8

- (2 p) 9. Randvärdesproblemet

$$y''(t) + y'(t) = 3, \quad y(5) = 4, \quad y(9) = 8$$

ska lösas med Finita DifferensMetoden. Andra ordningens differensapproximationer och steglängden $\Delta t = 2$ används.

Vad blir $y(7)$?

- 2 3 4 5 6 7 8 9