

Tentamen del 2

SF1511, 2018-06-05, kl 8.00-11.00,

Numeriska metoder och grundläggande programmering

Del 2, Max 50p + bonuspoäng (max 4p).

Rättas endast om del 1 är godkänd.

Betygsgränser inkl bonuspoäng: 10p D, 20p C, 30p B, 40p A.

Svar skall motiveras och uträkningar redovisas. Korrekt svar utan motivering eller med felaktig motivering medför poängavdrag.

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

P1. Givet följande tabell:

t	0	1	2
y	0	1	1/2

vill man hitta det styckvis kvadratiske polynomet $p(t)$:

$$p(t) = \begin{cases} a_0 + a_1t + a_2t^2, & 0 \leq t \leq 1 \\ b_0 + b_1t + b_2t^2, & 1 \leq t \leq 2, \end{cases}$$

som interpolerar punkterna i tabellen, är kontinuerlig och har kontinuerlig derivata i $(1, 1)$, samt uppfyller att

$$\int_1^2 p(t) dt = 2.5 .$$

- (10 p) **(a)** Ställ upp det ekvationssystem som ger koefficienterna för polynomet $p(t)$. Du behöver inte lösa ekvationssystemet för hand.
- (5 p) **(b)** Skriv ett MATLAB-program som beräknar koefficienterna och ritar upp polynomet $p(t)$.

Var god vänd

P2. För en parameter $a \neq 0$, vi vill hitta en lösning (x, y) till följande icke-linjära system av ekvationer

$$\begin{aligned}x^3 - y^3 &= a^2(y - x) + 0.01 \\ 2x^3 + y^3 &= 4a^3 - a^2x.\end{aligned}$$

- (2 p) (a) Vi vill skriva ekvationssystemet på följande form:

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vad är funktionen $F(x, y)$ in detta fall?

- (4 p) (b) Beräkna Jakobian-matrisen till funktionen $F(x, y)$ som du bestämde i deluppgift (a). För vilka x och y är Jakobian-matrisen inverterbar? Varför är det viktigt om man vill använda Newtons metod?
- (4 p) (c) Formulera Newtons metod för att lösa systemet av ekvationer. Vad är resultatet om man tar en iteration med Newtons metod med startgissning $(x_0, y_0) = (0, 0)$?
- (2 p) (d) Motivera varför $(x_0, y_0) = (a, a)$ är en bra startgissning.
- (7 p) (e) Skriv ett MATLAB-program som löser $F(x, y) = 0$ med Newtons metod för system för ett givet värdet på a . Svaret ska ha ett fel som är mindre än 10^{-10} i alla komponenter.

P3. En tunn tråd med laddningstätheten $\rho(x)$ och längden $2L$ är placerad längs x -axeln i intervallet $-L \leq x \leq L$. Den elektriska potentialen i en punkt (x_0, y_0, z_0) ges då av integralen

$$V(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{\rho(x)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + y_0^2 + z_0^2}} dx,$$

där ϵ_0 är permittiviteten i vakuum.

- (4 p) (a) Skriv en MATLAB-funktion som approximerar V med trapetsregeln. Funktionen ska ta (x_0, y_0, z_0) som indata och returnera en approximation av V . Du får använda variablerna `L`, `eps0` och funktionen `rho(x)` utan att definiera dem.
- (4 p) (b) Det (vektorvärda) elektriska fältet $\mathbf{E}$ ges som $\mathbf{E} = -\nabla V$. Skriv en MATLAB-funktion som approximerar $\mathbf{E}$ med hjälp av funktionen i deluppgift (a) och numerisk derivering med minst noggrannhetsordning två. Funktionen ska ta (x_0, y_0, z_0) som indata och returnera en approximation av vektorn $\mathbf{E}$.
- (6 p) (c) Vi fixerar $y_0 = z_0 = 0.1$ och vill nu hitta $x_0 = x^*$ så att den elektriska energitätheten $W = \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 / 2$ har värdet 7 J/m^3 . Skriv ett MATLAB-program som med hjälp av funktionen i deluppgift (b) bestämmer det sökta x^* -värdet. Alltför ineffektiva metoder ger inte full poäng. Du får anta att det finns en lösning i intervallet $0 \leq x^* \leq L$.
- (2 p) (d) Beskriv hur man kan gå tillväga för att uppskatta det numeriska felet i approximationen av x^* .

Notera 1: MATLABs inbyggda funktioner för integration och ekvationslösning får inte användas. Matlabkommandot `\` får användas.

Notera 2: Samtliga deluppgifter kan lösas separat. Har du inte löst (a) och/eller (b) kan du i senare deluppgifter anta att dessa funktioner är givna.