Institutionen för Matematik, KTH

Tentamen del 2
Analytiska och numeriska metoder för differentialekvationer SF1523
9.00-12.00 5/6 2015

Formelsamlingen BETA är tillåtet hjälpmedel men ej miniräknare.

Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar.

Del 2 rättas om del 1 är godkänd.

Betygsgränser: D 10, C 20, B 30 och A 40 poäng.

Det finns två alternativa uppgifter 7.

6a. (6p) Betrakta en dämpad ickelinjär fjäder vars position $x(t)$ vid tiden t uppfyller differentialekvationen

$$x''(t) = -\alpha x^3(t) - \beta x'(t) + \gamma \sin(\omega t)$$

där α, β, γ och ω är givna positiva konstanter. Formulera Eulers metod för att bestämma en numerisk approximation av $x(t),\ 0 < t < 10$, med givet begynnelsevärde $x(0) = 0$ och $x'(0) = 0$.

6b. (8p) Skriv ett matlabprogram som utför Eulerapproximationen i uppgift 6a.

6c. (6p) Utvidga formuleringen i uppgift 6a till att också approximera arbetet $\int_0^{10} f(t)x(t)dt$ där $f(t) = \gamma \sin(\omega t)$. Motivera utifrån teorin noggrannhetsordningen i approximationen av detta arbete.

6a. *Låt*

$$y_1(t) = x(t),$$
$$y_2(t) = x'(t).$$

Vi har

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ -\alpha y_1^3(t) - \beta y_2(t) + \gamma \sin(\omega t) \end{bmatrix} =: \mathbf{g}\big(t, \mathbf{y}(t)\big)$$

Gör indelningen $t_n = n\Delta t,\ n = 0, 1, 2, \ldots, N$, där $\Delta t = 10/N$ för något positivt heltal N. Approximera $\mathbf{y}(t_n)$ med $\mathbf{y}_n$ enligt Eulers metod:

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \Delta t \mathbf{g}(t_n, \mathbf{y}_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N-1\,.$$

6b. Ett exempel på matlabprogram är

```
%Eulermetod for ickelinjar fjader
% x''=-ax^3-bx'+c sin(wt), x(0)=x'(0)=0
a=1.0;
b=1.0;
```

```
c=1.0;
w=1.0;
N=1000;   %antal tidsteg
dt=10/N;  %steglangd

g=@(t,y) [y(2);-a*y(1)^3-b*y(2)+c*sin(w*t)];

Y=zeros(2,N);   %Begynnelsevarde och skapande av minne for y-varden
t=zeros(1,N);   %vektor for tider

for n=1:N-1
    Y(:,n+1)=Y(:,n)+dt*g(t(n),Y(:,n));         %Eulerapproximation
    t(n+1)=(n+1)*dt;                           %tidsindelning
end
plot(t,Y(1,:));                                %plottning av forsta komponent
```

6c. Låt $y_3(t) = \int_0^t f(s)y_1(s)ds$ och

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{bmatrix} .$$

Vi får

$$\mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ -\alpha y_1^3(t) - \beta y_2(t) + \sin(\omega t) \\ f(t)y_1(t) \end{bmatrix} =: \mathbf{h}\big(t, \mathbf{y}(t)\big) ,$$

med beygynnelsevärdet $\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Eulerapproximationen av detta system har noggrannhetsordningen $\mathcal{O}(\Delta t)$ eftersom funktionen $\mathbf{h}$ är Lipschitzkontinuerlig lokalt. Komponenten $y_3(10)$ ger därför en approximation av $\int_0^{10} f(t)x(t)dt$ med noggrannheten $\mathcal{O}(\Delta t)$ (detta gäller även om integrationen skulle göras med trapetsmetoden).

7. (15p) Vinkelutslaget $x(t)$ (mot rotationsaxeln) vid tiden t för en roterande dämpad pendel beskrivs av differentialekvationen

$$x''(t) = 2\sin x(t)\cos x(t) - \sin x(t) - |x'(t)|x'(t) - x'(t) .$$

Bestäm pendelns jämviktspunkter och avgör med hjälp av linjarisering (om möjligt) om de är stabila eller instabila.

(15p) **Alternativ uppgift 7.** Formulera och bevisa en sats om stabilitet för skalära differentialekvationer $y'(t) = g\big(y(t)\big)$ i en jämviktspunkt y_1.

7. *Låt*

$$y_1(t) = x(t),$$
$$y_2(t) = x'(t).$$

Då blir

$$\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'(t) \\ x''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2(t) \\ 2\sin\big(y_1(t)\big)\cos\big(y_1(t)\big) - \sin\big(y_1(t)\big) - y_2(t) - y_2(t)|y_2(t)| \end{bmatrix}$$

vilket ger jämviktsvillkoren

$$y_2 = 0,$$
$$2\sin y_1 \cos y_1 - \sin y_1 = 0,$$

vars lösning är

$$y_2 = 0,$$
$$\sin y_1 = 0 \qquad \textit{eller } 2\cos y_1 = 1.$$

Jämviktslösningarna blir då $(n\pi, 0),\ n \in \mathbb{N}$ *och* $(\pm\pi/3{+}2n\pi, 0),\ n \in \mathbb{N}$. *Jämviktspunkterna* $(\pi/3 + 2n\pi, 0)$ *och* $(-\pi/3 + 2n\pi, 0)$ *svarar mot symmetrin att mäta vinkel i positiv eller negativ riktning.*

Vi har Jacobianen

$$J(y_1, y_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2\cos(2y_1) - \cos y_1 & -2|y_2| - 1 \end{bmatrix}.$$

I jämviktspunkten $(n\pi, 0)$ *blir*

$$J(n\pi, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 - (-1)^n & -1 \end{bmatrix}$$

vars egenvärden λ *uppfyller*

$$0 = -\lambda(-1-\lambda) - 2 + (-1)^n = \lambda^2 + \lambda - 2 + (-1)^n = (\lambda + \frac{1}{2})^2 - 2 + (-1)^n - \frac{1}{4}$$

vilket ger $\lambda = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{2 - (-1)^n + \frac{1}{4}}$. *Eftersom ett egenvärde är positivt och ett negativt är* $(n\pi, 0)$, *en instabil sadelpunkt* $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Den andra och den tredje jämviktspunken har Jacobianen

$$J(\pm\pi/3 + 2n\pi, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3/2 & -1 \end{bmatrix}$$

vars egenvärden uppfyller

$$0 = \lambda^2 + \lambda + 1 = (\lambda + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{2} - \frac{1}{4}$$

med lösningen $\lambda = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{5}}{2}$, *så jämviktspunkterna* $(\pm\pi/3 + 2n\pi, 0)$ *är stabila spiraler,* $n = 0, 1, 2, \dots$.

8.(15p) Bestäm utböjningen, $u(x,t)$, i positionen x vid tiden t, av en svängande sträng som uppfyller vågekvationen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + g(x,t), \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,\\
u(x,0) &= 0, \quad x \in \mathbb{R},\\
\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} &= 0, \quad x \in \mathbb{R},\\
u(x,t) &\to 0, \quad |x| \to \infty,
\end{aligned}$$

med en drivande kraft $g(x,t) = \frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$.

8. *Låt* $U(\omega,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i\omega x}dx$ *vara Fouriertransformen av* $u(x,t)$ *i* x*-led. Vi har Fouriertransformerna*

$$\begin{aligned}
u(x,t) &\xrightarrow{\mathcal{F}_x} U(\omega,t),\\
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &\xrightarrow{\mathcal{F}_x} -\omega^2 U(\omega,t),\\
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &\xrightarrow{\mathcal{F}_x} \frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial t^2},\\
e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi} &\xrightarrow{\mathcal{F}_x}= e^{-\omega^2/2},\\
g(x,t) &\xrightarrow{\mathcal{F}_x} G(\omega) = -\omega^2 e^{-\omega^2/2},
\end{aligned}$$

vilket ger den transformerade ekvationen

$$\frac{\partial^2 U(\omega,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 U(\omega,t) + G(\omega)\,.$$

Vi kan dela upp $U = U_h + U_p$ *där* U_h *löser den homogena ekvationen*

$$\frac{\partial^2 U_h(\omega,t)}{\partial t^2} + \omega^2 U_h(\omega,t) = 0\,,$$

och U_p *är en partikulär lösning till*

$$\frac{\partial^2 U_p(\omega,t)}{\partial t^2} + \omega^2 U_p(\omega,t) = G(\omega)\,.$$

Den karakteristiska ekvationen för den homogena ordinära differentialekvation är

$$m^2 + \omega^2 = 0$$

vilket ger

$$U_h(\omega, t) = A(\omega)\cos(\omega t) + B(\omega)\sin(\omega t).$$

En partikulär ansats är $U_p(\omega, t) = C(\omega)$ *vilket ger*

$$\omega^2 C(\omega) = G(\omega) = -\omega^2 e^{-\omega^2/2}$$

och vi får $C(\omega) = -e^{-\omega^2/2}$, *så*

$$U(\omega, t) = U_h(\omega, t) + U_p(\omega, t) = A(\omega)\cos(\omega t) + B(\omega)\sin(\omega t) - e^{-\omega^2/2}\,.$$

Begynnelsevillkoren visar att

$$0 = U(\omega, 0) = A(\omega) - e^{-\omega^2/2}$$

och

$$0 = \frac{\partial U(\omega, t)}{\partial t} = \omega B(\omega)\,.$$

Detta ger

$$U(\omega, t) = e^{-\omega^2/2}(\cos(\omega t) - 1) = -e^{-\omega^2/2}(1 - \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2})$$

vars inverstransform (för translation) blir

$$u(x, t) = -\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}(e^{-(x+t)^2/2} + e^{-(x-t)^2/2})\,.$$