KTH Matematik

Namn: ....

Personnummer:.. **Program och årskurs:** ....

Tentamen del 1
Analytiska och numeriska metoder för differentialekvationer SF1523
9.00-12.00 den 5/6 2015

Gränsen för betyg E är 12 poäng. Om kontrollskrivning n är godkänd erhålls 4 poäng på uppgift n, $n = 1, 2, 3, 4$, d.v.s uppgift $n.a$ och $n.b$ behöver ej lösas.

Beta är tillåtet hjälpmedel men ej miniräknare.
Skriv svaren på detta papper: ett kryss per uppgift.

1. Om din kontrollskrivning 1 är godkänd kryssa i här

☐ Kontrollskrivning 1 är godkänd, så uppgift 1 behöver ej lösas.

1. (4p) Differentialekvationen

$$y'(x) - 2y(x) = \frac{1}{2}, \quad x > 0,$$
$$y(0) = 0,$$

har värdet $y(1)$ lika med

☐ $e^2 - 1$

☐ $\frac{e^2-1}{2}$

☒ $\frac{e^2-1}{4}$

☐ $e^{-2} - 1$

☐ $\frac{e^{-2}-1}{2}$

☐ $\frac{e^{-2}-1}{4}$

☐ något annat

2. Om din kontrollskrivning 2 är godkänd kryssa i här

☐ Kontrollskrivning 2 är godkänd, så uppgift 2 behöver ej lösas.

2a.(2p) Anta att 2×2 matrisen A har egenvärdena -1 och -2 med motsvarande egenvektorer $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ respektive $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Då är den allmänna lösningen, $\mathbf{X} : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$, till systemet

$$\mathbf{X}'(t) = A\mathbf{X}(t)$$

för godtyckliga reella konstanter c_1 och c_2

- [ ] $c_1 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$
- [ ] $c_1 \cos t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \sin(2t) \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$
- [x] $c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$
- [ ] $c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$
- [ ] $c_1 e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

2b. (2p) Antag att differentialekvationen

$$x'(t) + \frac{1}{1+t^2} x(t) = 0, \tag{1}$$

har lösningarna

$$x_1 : [0, 1] \to \mathbb{R},$$
$$x_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}.$$

Betrakta funktionerna

$$f_1(t) = x_1(t) + 2x_2(t),$$
$$f_2(t) = x_1(t)x_2(t),$$
$$f_3(t) = x_1(t) - x_2(t).$$

Då vet man att

- [ ] funktionerna f_1 och f_2 är lösningar till (1)
- [x] funktionerna f_1 och f_3 är lösningar till (1)
- [ ] bara funktionen f_3 är lösning till (1)
- [ ] bara funktionen f_2 är lösning till (1)
- [ ] ingen av funktionerna f_1, f_2 och f_3 är lösning till (1)
- [ ] bara funktionen f_1 är lösning till (1)
- [ ] funktionerna f_1, f_2 och f_3 är lösningar till (1)

3. Om din kontrollskrivning 3 är godkänd kryssa i här

☐ Kontrollskrivning 3 är godkänd, så uppgift 3 behöver ej lösas.

3a. (2p) Antag att $x_1 \in \mathbb{R}$ är en jämviktslösning (d.v.s. kritisk punkt) till differentialekvationen

$$x'(t) = g\big(x(t)\big), \quad t > 0$$

där funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är differentierbar. Då gäller att x_1 är en instabil jämviktslösning om

☐ x_1 är en fixpunkt, d.v.s. $x_1 = g(x_1)$,

☐ $g'(x_1) < 0$,

☒ $g'(x_1) > 0$,

☐ $g''(x_1) > 0$,

☐ $g''(x_1) < 0$,

☐ $g(x_1) = 0$.

3b.(2p) Anta att 2×2 matrisen A har egenvärdena -1 och -2. Då är jämviktslösningen $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $t > 0$, till systemet av differentialekvationer

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t), \quad t > 0,$$

☐ en stabil sadelpunkt,

☐ en instabil sadelpunkt,

☒ en stabil nod,

☐ en instabil nod,

☐ en stabil spiral,

☐ en instabil spiral,

☐ något annat.

4. Om din kontrollskrivning 4 är godkänd kryssa i här

☐ Kontrollskrivning 4 är godkänd, så uppgift 4 behöver ej lösas.

4. (4p) Funktionen $f(x) = 1 - x^2$, $-1 < x < 1$, med perioden 2 har Fourierserien

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(n\pi x) + b_n \sin(n\pi x)\big)$$

där a_0 är lika med

☐ 0	☐ $\frac{-2}{3}$
☒ $\frac{4}{3}$	☐ $\frac{3}{2}$
☐ $\frac{3}{4}$	☐ $\frac{4}{5}$
☐ $\frac{-3}{4}$	☐ $\frac{5}{4}$
☐ $\frac{-4}{3}$	☐ $\frac{-4}{5}$
☐ $\frac{2}{3}$	☐ något annat.

5a. (2p) Ett steg med explicita Eulermetoden (d.v.s. framåt Euler) för approximation av $y(1.1)$ där

$$y'(x) = 2xy(x),\ \ x > 1,$$
$$y(1) = 1$$

ger värdet

☐ 1.0	☐ 0.8
☐ 1.1	☐ 1.05
☒ 1.2	☐ 0.95
☐ 0.9	☐ något annat

5b. (2p) Matlabkoden

```
N=100;
dx=1/(N+1);
u=zeros(N,1);
A=zeros(N,N);
F=zeros(N,1);
X=zeros(N,1);

for n=2:N-1
    x=n*dx;
    X(n)=x;

    A(n,n)=-2/dx^2;
    A(n,n+1)=1/dx^2;
    A(n,n-1)=1/dx^2;

    F(n)=x;
```

```
end
A(1,1)=-2/dx^2;
A(1,2)=1/dx^2;

A(N,N)=-2/dx^2;
A(N,N-1)=1/dx^2;

X(1)=dx;
X(N)=N*dx;
F(N)=X(N);
F(1)=X(1);

u=A\F;

plot(X,u)
```

ger en approximation till randvärdesproblemet

- [ ] $u''(x) = 1, \quad u(0) = u(1) = 0,$
- [ ] $u''(x) = 1, \quad u(0) = 0, \ u(1) = 1,$
- [ ] $u''(x) = 0, \quad u(0) = u(1) = 1,$
- [ ] $u''(x) = 0, \quad u(0) = 1, \ u(1) = 0,$
- [ ] $-u''(x) = x, \quad u(0) = u(1) = 0,$
- [ ] $-u''(x) = x, \quad u(0) = 0, \ u(1) = 1,$
- [x] $u''(x) = x, \quad u(0) = u(1) = 0,$
- [ ] något annat.