Institutionen för Matematik, KTH

Tentamen del 2
Analytiska och numeriska metoder för differentialekvationer SF1523
9.00-12.00 24/8 2015

Formelsamlingen BETA är tillåtet hjälpmedel men ej miniräknare.

Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar.

Del 2 rättas om del 1 är godkänd.

Betygsgränser: D 10, C 20, B 30 och A 40 poäng. Maximalt kan 50 poäng erhållas.

Det finns två alternativa uppgifter 7, varav endast en får lösas.

6a. (10p) Temperaturen $u(x)$ i en stav vid positionen x, $0 < x < 1$, med längd 1 uppfyller randvärdesproblemet

$$\begin{aligned} -u''(x) + u(x) &= x\,, \quad 0 < x < 1\,, \\ u(0) &= 0\,, \\ u(1) &= 3\,. \end{aligned}$$

Formulera en finit differensmetod för att approximera funktionen u.

6b. (10p) Skriv ett Matlabprogram som utför approximationen i uppgift 6a.

6a. Låt $x_n = n\Delta x,\ n = 0, 1, 2, \ldots, N+1$ *vara en indelning av intervallet* $[0,1]$, *där* $\Delta x = 1/(N+1)$, *och approximera med differenskvoten*

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}u(x_n) &\simeq \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n+1}}{(\Delta x)^2}\,, \\ u(x_n) &\simeq u_n. \end{aligned}$$

Differensapproximation ger differensekvationerna

$$\begin{aligned} -\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n+1}}{(\Delta x)^2} + u(x_n) &= x_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, N, \\ u_0 &= 0, \\ u_{N+1} &= 3. \end{aligned}$$

Ekvationerna i matrisform lyder $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ där

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_N \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{N-1} \\ x_N + 3/\Delta x^2 \end{bmatrix}$$

och för $n = 1, 2, 3, \ldots N$ och $m = 1, 2, 3, \ldots, N$ har $N \times N$ matrisen A komponenterna

$$A_{nm} = \begin{cases} 2(\Delta x)^{-2} + 1, & n = m, \\ -(\Delta x)^{-2}, & |n - m| = 1, \\ 0, & |n - m| > 1. \end{cases}$$

2b. Ett exempel på Matlabpogram är

```
N=100;
dx=1/(N+1);
u=zeros(N,1);
A=zeros(N,N);
F=zeros(N,1);
X=zeros(N,1);

for n=2:N-1
    x=n*dx;
    X(n)=x;

    A(n,n)=2/dx^2+1;
    A(n,n+1)=-1/dx^2;
    A(n,n-1)=-1/dx^2;

    F(n)=x;
end
A(1,1)=2/dx^2+1;
A(1,2)=-1/dx^2;

A(N,N)=2/dx^2+1;
A(N,N-1)=-1/dx^2;

X(1)=dx;
X(N)=N*dx;
```

```
F(N)=X(N)+3/dx^2;
F(1)=X(1);

u=A\F;

hold on
plot(X,u,'b')
```

7. (15p) Temperaturen $u(x,t)$ i positionen x vid tiden t i en stav med längden 1 uppfyller

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + u(x,t), \quad 0 < x < 1,\ t > 0\,,\\ u(x,0) &= 1, \quad 0 < x < 1,\\ u(0,t) &= u(1,t) = 0\,, \quad t > 0\,.\end{aligned}$$

Bestäm temperaturen $u(x,t)$, för $0 < x < 1,\ t > 0$, som en Fourierserie.

7. Variabelseparationsansatsen $u(x,t) = X(x)T(t)$ insatt i ekvationen ger

$$T'(t)X(x) = T(t)\big(X''(x) + X(x)\big)$$

och vi får

$$\frac{T'(t)}{T(t)} - 1 = \frac{X''(x)}{X(x)}\,.$$

Eftersom högerledet beror bara på x och vänsterledet bara på t måste högerledet och vänsterledet vara en konstant λ. Vi får $X'' = \lambda X$. Om $\lambda = -\alpha^2 < 0$ får vi med karakteristiska ekvationen lösningen $X(x) = a\cos(\alpha x) + b\sin(\alpha x)$, där a och b är godtyckliga konstanter. Randvillkoren ger $a = 0$ och $b\sin(\alpha) = 0$ som har lösningen $\alpha = n\pi,\ n = 0, 1, 2, \ldots$. På samma sätt ger $\lambda \geq 0$ endast lösningen $X(x) = 0$.

Ekvationen för T blir $T'/T - 1 = -n^2\pi^2$ och vi får lösningen $T(t) = ce^{(-n^2\pi^2+1)t}$, med en godtycklig konstant c. Eftersom ekvationen är linjär är också summan

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{(-n^2\pi^2+1)t} \sin(n\pi x)$$

en lösning till värmeledningsekvationen. Koefficienterna c_n bestäms av begynnelsevillkoret $u(x,0)=1$. Ortogonaliteten av $\{\sin n\pi x\}_{n=1}^{\infty}$ ger då

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}c_n &= \int_0^1 \sin(n\pi x)dx \\ &= \Big[\frac{\cos(n\pi x}{-n\pi}\Big]_0^1 \\ &= \frac{(1-(-1)^n}{n\pi}\,.\end{aligned}$$

Svar: $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(1-(-1)^2)}{n\pi}e^{(-n^2\pi^2+1)t}\sin(n\pi x)$.

(15p) **Alternativ uppgift 7.** Formulera och bevisa en sats om stabilitet för skalära differentialekvationer $y'(t)=g\big(y(t)\big)$ i en jämviktspunkt $y_1\in\mathbb{R}$.

8. (15p) En model av antal rovdjur $x(t)$ och antal bytesdjur $y(t)$ vid tiden t (mätt i en referensenhet av 1000 djur) lyder

$$\begin{aligned}x'(t) &= x(t)\big(1-x(t)-y(t)\big)\,,\\ y'(t) &= y(t)\big(\frac{3}{4}-y(t)-\frac{x(t)}{2}\big)\,.\end{aligned}$$

Bestäm systemets alla jämviktslösningar (d.v.s. kritiska punkter) och avgör stabiliten för de jämviktslösningar där båda populationer fortlever.

8. Vi bestämmer först jämviktslösningarna. De uppfyller

$$\begin{aligned}x(1-x-y) &= 0\\ y(\frac{3}{4}-y-\frac{x}{2}) &= 0.\end{aligned}$$

Första ekvationen ger $x=0$ eller $1-x-y=0$ och andra ekvationen ger $y=0$ eller $\frac{3}{4}-y-\frac{x}{2}=0$. Detta ger fyra alternativ: $(x,y)=(0,0)$; $x=0$ och $y=3/4$; $y=0$ och $x=1$; $1-x-y=0$ och $3/4-y-x/2=0$ som har lösningen $(x,y)=(1/2,1/2)$. Den enda jämviktslösningen med $x>0$ och $y>0$ är $(x,y)=(1/2,1/2)$.

Jacobianen till systemet

$$\begin{aligned}x'(t) &= x(t)-x^2(t)-x(t)y(t)\,,\\ y'(t) &= \frac{3}{4}y(t)-y^2(t)-\frac{x(t)y(t)}{2})\end{aligned}$$

blir

$$J(x,y)=\begin{bmatrix}1-2x-y & -x\\ -y/2 & \frac{3}{4}-2y-x/2\end{bmatrix}$$

och vi får

$$J(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Dess egenvärden λ *uppfyller*

$$0 = (-\frac{1}{2} - \lambda)(-\frac{1}{2} - \lambda) - \frac{1}{8} = (\lambda + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{8}.$$

Lösningen blir

$$\lambda = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{4} < 0,$$

vilket visar att $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *är en asymptotiskt stabil jämviktspunkt.*