KTH Matematik

Namn: ....

Personnummer:.. **Program och årskurs:** ....

Tentamen del 1
Analytiska och numeriska metoder för differentialekvationer SF1523
9.00-12.00 den 24/8 2015

Gränsen för betyg E är 12 poäng. Om kontrollskrivning n är godkänd erhålls 4 poäng på uppgift n, $n = 1, 2, 3, 4$, d.v.s uppgift $n.a$ och $n.b$ behöver ej lösas.

Beta är tillåtet hjälpmedel men ej miniräknare.
Skriv svaren på detta papper: ett kryss per uppgift.

1. Om din kontrollskrivning 1 är godkänd kryssa i här

☐ Kontrollskrivning 1 är godkänd, så uppgift 1 behöver ej lösas.

1. (4p) Differentialekvationen

$$y'(x) - x\sqrt{y(x)} = 0, \quad x > 0,$$
$$y(0) = \frac{1}{4},$$

har värdet $y(2)$ lika med

☐ 1

☐ $\frac{5}{4}$

☐ $\frac{3}{2}$

☐ $\frac{7}{4}$

☐ 2

☒ $\frac{9}{4}$

☐ något annat

☐ $\frac{5}{2}$

☐ $\frac{3}{4}$

☐ $\frac{1}{2}$

2. Om din kontrollskrivning 2 är godkänd kryssa i här

☐ Kontrollskrivning 2 är godkänd, så uppgift 2 behöver ej lösas.

2a.(2p) Anta att konstanta symmetriska 3×3 matrisen A har ett enkelt egenvärde som är 2, med tillhörande egenvektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, och ett dubbelt egenvärde som är -1, med tillhörande egenvektorer $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ respektive $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Då är den allmänna lösningen, $\mathbf{X} : [0, \infty) \to \mathbb{R}^3$, till systemet

$$\mathbf{X}'(t) = A\mathbf{X}(t)$$

för godtyckliga reella konstanter $c_1,\ c_2$ och c_3

- [ ] $c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

- [ ] $c_1 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3 e^{t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

- [x] $c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3 e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

- [ ] $c_1 \sin 2t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \sin t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3 \cos t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

- [ ] $c_1 e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

2b. (2p) Differentialekvationen

$$y'(t) = y(t)\Big(1 - \big(y(t)\big)^2\Big), \quad t > 0$$

☐ har precis en stabil jämviktslösning och två instabila jämviktslösningar

☒ har precis två stabila jämviktslösningar och en instabil jämviktslösning

☐ har ingen jämviktslösning (d.v.s. kritisk punkt)

☐ har precis tre stabila jämviktslösningar

☐ har precis en stabil och en instabil jämviktslösning

☐ har precis en stabil jämviktslösning och ingen instabil jämviktslösning.

☐ har precis en instabil jämviktslösning och ingen stabil jämviktslösning.

☐ har någon annan kombination av antal stabila och instabila jämviktslösningar.

3. Om din kontrollskrivning 3 är godkänd kryssa i här

☐ Kontrollskrivning 3 är godkänd, så uppgift 3 behöver ej lösas.

3a. (2p) Matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$ har ett dubbelt egenvärde som är -2 och bara en egenvektor $s\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, för $s \in \mathbb{R}$. Den allmänna lösningen, $\mathbf{x} : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$, till differentialekvationen

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t), \quad t > 0,$$

kan då för godtyckliga reella konstanter c_1 och c_2 skrivas

☒ $c_1 e^{-2t}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t}\Big(t\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\Big)$

☐ $c_1 e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t}\Big(t\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\Big)$

☐ $c_1 e^{-2t}\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2\Big(t\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\Big)$

☐ $c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{-2t}\Big(t\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\Big)$

☐ $c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2\Big(t\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\Big)$.

3b.(2p) Anta att konstanta 2×2 matrisen A har egenvärdena 3 och -1, med tillhörande egenvektorer $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ respektive $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$. Då är jämviktslösningen $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $t > 0$, till systemet av differentialekvationer

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t), \quad t > 0,$$

- [ ] en stabil sadelpunkt,
- [x] en instabil sadelpunkt,
- [ ] en stabil nod,
- [ ] en instabil nod,
- [ ] en stabil spiral,
- [ ] en instabil spiral,
- [ ] något annat.

4. Om din kontrollskrivning 4 är godkänd kryssa i här

- [ ] Kontrollskrivning 4 är godkänd, så uppgift 4 behöver ej lösas.

4a. (2p) Cosinusserien

$$C_N(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi x)$$

och sinusserien

$$S_N(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \Big(\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n^3\pi^2} \big((-1)^n - 1\big) \Big) \sin(n\pi x)$$

approximerar funktionen $f(x) = x^2$ för $0 < x < 1$, d.v.s.

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) = \lim_{N\to\infty} C_N(x) = f(x), \quad 0 < x < 1\,.$$

Då gäller för $N = 100$

- [x] $\int_0^1 |f(x) - C_N(x)|^2 dx < \int_0^1 |f(x) - S_N(x)|^2 dx$,
- [ ] $\int_0^1 |f(x) - C_N(x)|^2 dx > \int_0^1 |f(x) - S_N(x)|^2 dx$,
- [ ] $\int_0^1 |f(x) - C_N(x)|^2 dx = \int_0^1 |f(x) - S_N(x)|^2 dx$.

Tips: För en ortonormerad bas av funktioner $\{e_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ på intervallet $[0, 1]$, där

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n(x),$$

gäller

$$\int_0^1 |g(x)|^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2$$

och

$$c_n = \int_0^1 g(x) e_n(x) dx\,.$$

4b. (2p) Cosinusserien

$$C_\infty(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x)$$

som ger $C_\infty(x) = x^2,\ 0 < x < 1$, bestäms av

- [x] $a_n = 2\int_0^1 x^2 \cos(n\pi x) dx$
- [ ] $a_n = 2\int_0^1 x^2 \cos(2n\pi x) dx$
- [ ] $a_n = 2\int_0^1 x^2 \sin(n\pi x) dx$
- [ ] $a_n = 2\int_0^1 x^2 \sin(2n\pi x) dx$
- [ ] $a_n = 2\int_{-1}^1 x^2 \cos(n\pi x) dx$
- [ ] $a_n = 2\int_{-1}^1 x^2 \cos(2n\pi x) dx$
- [ ] $a_n = 2\int_{-1}^1 x^2 \sin(n\pi x) dx$
- [ ] $a_n = 2\int_{-1}^1 x^2 \sin(2n\pi x) dx$
- [ ] något annat,

5a. (2p) Två steg med explicita Eulermetoden (d.v.s. framåt Euler) och steglängd 0.1 för approximation av $y(0.2)$, där

$$\begin{aligned} &y'(t) = 1 - t + 4y(t),\ t > 0,\\ &y(0) = 1, \end{aligned}$$

ger värdet

- [ ] 2.10
- [ ] 2.12
- [ ] 2.14
- [ ] 2.15
- [ ] 2.17
- [x] 2.19
- [ ] 2.20
- [ ] något annat

5b. (2p) Finita differensmetoden

$$\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{(\Delta x)^2} - 4u_n = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, N,$$

med $\Delta x = 1/(N+1)$, där u_n är en approximation av $u\big(n/(N+1)\big)$ och $u_0 = 1$ och $u_{N+1} = 3$, ger en approximation av randvärdesproblemet

- ☐ $-u''(x) = 4u(x), \ u(0) = 1, u(1) = 3,$
- ☒ $u''(x) = 4u(x), \ u(0) = 1, u(1) = 3,$
- ☐ $u''(x) = u(x), \ u(0) = 1, u(1) = 3,$
- ☐ $-u''(x) = 4u(x), \ u(0) = u(1) = 0,$
- ☐ $u''(x) = 4u(x), \ u(0) = 0, u(1) = 1,$
- ☐ $u''(x) = u(x), \ u(0) = 3, u(1) = 1,$
- ☐ något annat.