Institutionen för Matematik, KTH

Formelsamlingen BETA är tillåtet hjälpmedel men ej miniräknare.

Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar.

Del 2 rättas om del 1 är godkänd.

Betygsgränser: D 10, C 20, B 30 och A 40 poäng. Maximalt kan 50 poäng erhållas.

Det finns två alternativa uppgifter 7, varav endast en får lösas.

6. Utböjningen $u(x)$ i positionen x av en fritt upplagd balk med jämn lasttäthet 1 uppfyller Bernoulli-Eulers ekvation

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\big((1+x^2)\frac{\mathrm{d}^2u(x)}{\mathrm{d}x^2}\big) &= 1, \quad 0<x<1,\\ u(0)=u(1) &= 0,\\ \frac{\mathrm{d}^2u(0)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}^2u(1)}{\mathrm{d}x^2} &= 0\,.\end{aligned}$$

6a.(10p) Formulera en finit differensmetod för att approximera utböjningen u.

6b.(10p) Skriv ett matlabprogram som utför approximationen i uppgift 6a och beräknar och skriver ut den maximala utböjningen.

6a. *Låt $w(x)=(1+x^2)u''(x)$. Vi har*

$$\begin{aligned}w''(x) &= 1, \quad 0<x<1,\\ w(0)=w(1) &= 0,\end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned}(1+x^2)u''(x) &= w(x), \quad 0<x<1,\\ u(0) &= u(1)\,.\end{aligned}$$

Låt $x_n = n\Delta x$, för $n=0,1,2,\ldots,N+1$, vara en indelning av intervallet $[0,1]$ där $x_{N+1}=1/(N+1)$. Differensapproximationerna

$$\begin{aligned}w_n &\simeq w(x_n),\\ \frac{w_{n+1}-2w_n+w_{n-1}}{(\Delta x)^2} &\simeq w''(x_n),\\ u_n &\simeq u(x_n),\\ \frac{u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}}{(\Delta x)^2} &\simeq u''(x_n),\end{aligned}$$

ger

$$\frac{1}{(\Delta x)^2}(w_{n+1} - 2w_n + w_{n-1}) = 1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, N, \qquad (1)$$
$$w_0 = w_{N+1} = 0,$$

och

$$\frac{1 + x_n^2}{(\Delta x)^2}(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) = w_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, N, \qquad (2)$$
$$u_0 = u_{N+1} = 0.$$

Ekvationerna (1) och (2) kan skrivas på matrisform med vektorn $W = \begin{bmatrix} w_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_N \end{bmatrix}$ *och*

$N \times N$ *matrisen* A *där*

$$A_{nm} = \begin{cases} -2/(\Delta x)^2, & n = m \\ 1/(\Delta x)^2, & |n - m| = 1 \\ 0 & |n - m| \geq 2 \end{cases}$$

som $AW = F$*, där* $F = \begin{bmatrix} 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N$*, respektive som* $AU = G$*, där* $G = \begin{bmatrix} w_1/(1 + x_1^2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ w_N/(1 + x_N^2) \end{bmatrix}$.

6b. Ett exempel på Matlabkod är

```
N = 1000;
dx= 1/(N+1);
F = ones(N,1);
U = zeros(N,1);
W = zeros(N,1);
G = zeros(N,1);
A = zeros(N,N);

for n=2:N-1
    A(n,n)  = -2/(dx*dx);
    A(n,n-1)=  1/(dx*dx);
    A(n,n+1)=  1/(dx*dx);
end

A(1,1)=-2/(dx*dx);
A(1,2)= 1/(dx*dx);
```

```
A(N,N)=-2/(dx*dx);
A(N,N-1)= 1/(dx*dx);

W=A\F;

for n=1:N
    x(n)=n*dx;
    G(n)=W(n)/(1+x(n)*x(n));
end

U=A\G;

umax=max(U);

%% alternativ om max(U) ej anvands
% umax=0;
% for n=1:N
%     if(U(n)>umax)
%         umax=U(n);
%     end
% end
%%

display('maximal utbojning ar')
display(umax)
```

7. (15p) Koncentrationen $u(x,t)$, i positionen x vid tiden t, av ett ämne med konstant konvektionsfart a och absorptionsfunktionen $b(t)$ uppfyller

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + a\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + b(t)u(x,t) &= 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= g(x), \quad -\infty < x < \infty, \\ \lim_{|x|\to\infty} u(x,t) &= 0, \quad t > 0\,. \end{aligned}$$

Bestäm funktionen $u(x,t)$, uttryckt i b, g och a för $x \in \mathbb{R}$ och $t > 0$, där b är en godtycklig given absorptionsfunktion $b : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, funktionen g är en godtycklig given begynnelsefunktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ och konstanten $a \in \mathbb{R}$ är en godtycklig given positiv konstant fart.

7. *Låt $U(\omega,t)$ vara Fouriertransformen i $x-$led:*

$$U(\omega,t)=\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-i\omega x}\mathrm{d}x.$$

Vi har Fouriertransformerna

$$\begin{aligned} u(x,t) &\overset{\mathcal{F}}{\longrightarrow} U(\omega,t),\\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &\overset{\mathcal{F}}{\longrightarrow} \frac{\partial U(\omega,t)}{\partial t},\\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} &\overset{\mathcal{F}}{\longrightarrow} i\omega U(\omega,t)\,. \end{aligned}$$

Fouriertransformering av ekvationen ger

$$\frac{\partial U(\omega,t)}{\partial t}+\big(ia\omega+b(t)\big)U(\omega,t)=0,\quad x\in\mathbb{R},t>0.$$

Denna ekvation är separabel

$$\int\frac{\mathrm{d}U}{U}=-\int\big(ia\omega+b(t)\big)\mathrm{d}t$$

som medför

$$\log\frac{U(\omega,t)}{U(\omega,0)}=-ia\omega t-\int_0^t b(s)\mathrm{d}s$$

och

$$U(\omega,t)=U(\omega,0)e^{-i\omega at-\int_0^t b(s)\mathrm{d}s}\,.$$

Translation ger

$$U(\omega,t)=U(\omega,0)e^{-i\omega at-\int_0^t b(s)\mathrm{d}s}\overset{\mathcal{F}^{-1}}{\longrightarrow}u(x-at,0)e^{-\int_0^t b(s)\mathrm{d}s}$$

och svaret

$$u(x,t)=g(x-at)e^{-\int_0^t b(s)\mathrm{d}s}\,.$$

(15p) **Alternativ uppgift 7.** Formulera en differenskvot som approximerar derivatan av en reellvärd funktion av en variabel och härled en feluppskattning.

8. (15p) En model av antal rovfiskar $x(t)$ och antal bytesfiskar $y(t)$ vid tiden t (mätt i en referensenhet av 1000 fiskar), utan människors fiske, lyder

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t)\big(1 - x(t) - y(t)\big)\,, \\ y'(t) &= y(t)\big(\frac{3}{4} - y(t) - \frac{x(t)}{2}\big)\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Anta nu att bytesfiskarna fiskas med en konstant relativ fiskekvot $\alpha \in [0,1]$ så att antalet rovfiskar x och bytesfiskar y istället uppfyller

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t)\big(1 - x(t) - y(t)\big)\,, \\ y'(t) &= y(t)\big(\frac{3}{4} - y(t) - \frac{x(t)}{2}\big) - \alpha y(t)\,. \end{aligned} \tag{4}$$

Hur ska den konstanta fiskekvoten α väljas för att maximera fångsten αy_p där (x_p, y_p) är en jämviktslösning till (4) (d.v.s. kritisk punkt) med $x_p > 0$ och $y_p > 0$.

Visa också att det optimal valet av α ger en stabil jämviktslösning (x_p, y_p).

8. *Jämvikt leder till*

$$x = 0 \quad \textit{eller} \quad 1 - x - y = 0 \tag{5}$$

och

$$y = 0 \quad \textit{eller} \quad \frac{3}{4} - \alpha - y - \frac{x}{2} = 0\,. \tag{6}$$

Villkoret från (5), $x = 1 - y$, *insatt i* (6) *ger*

$$0 = \frac{3}{4} - \alpha - y - \frac{1-y}{2} = \frac{1}{4} - \alpha - \frac{y}{2}$$

så $y_p = \frac{1}{2} - 2\alpha$ *och* $x_p = 1 - y_p = \frac{1}{2} + 2\alpha$. *Villkoren* $x_p > 0$ *och* $y_p > 0$ *medför* $0 < \frac{1}{2} + 2\alpha$, *d.v.s.* $\alpha > -1/4$, *och* $0 < \frac{1}{2} - 2\alpha$, *d.v.s.* $\alpha < 1/4$, *så* $|\alpha| < 1/4$. *Fångsten blir*

$$y_p\alpha = (\frac{1}{2} - 2\alpha)\alpha$$

som maximeras om $\frac{1}{2} - 4\alpha = 0$, *d.v.s. om* $\alpha = 1/8$, *vilket ger* $y_p = \frac{1}{2} - 2\alpha = \frac{1}{4}$ *och* $x_p = 1 - y_p = \frac{3}{4}$.

Jacobianen är

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} 1 - 2x - y & -x \\ -\frac{y}{2} & \frac{3}{4} - \alpha - 2y - \frac{x}{2} \end{bmatrix}$$

och

$$J(x_p, y_p) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

vars egenvärden λ *uppfyller*

$$0 = (\lambda + \frac{3}{4})(\lambda + \frac{1}{4}) - \frac{3}{32} = \lambda^2 + \lambda + \frac{3}{32} = (\lambda + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{32} - \frac{1}{4}.$$

De två egenvärdena

$$\lambda = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{32}} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{\frac{5}{8}})$$

är båda negativa och därför är den kritiska punkten $(x_p, y_p) = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$ *en asymptotiskt stabil jämviktspunkt.*