KTH Matematik

Namn: ....

Personnummer:.. **Program och årskurs:** ....

Tentamen del 1
Analytiska och numeriska metoder för differentialekvationer SF1523
8.00-11.00 den 31/5 2016

Gränsen för betyg E är 12 poäng. Om kontrollskrivning n är godkänd erhålls 4 poäng på uppgift n, $n = 1, 2, 3, 4$, d.v.s. uppgift $n.a$ och $n.b$ behöver ej lösas.

Beta är tillåtet hjälpmedel men ej miniräknare.
Skriv svaren på detta papper: ett kryss per uppgift.

1. Om din kontrollskrivning 1 är godkänd kryssa i här

☐ Kontrollskrivning 1 är godkänd, så uppgift 1 behöver ej lösas.

1. (4p) Differentialekvationen

$$\begin{aligned} y'(x) &= \big(y(x)\big)^2, \quad 0 < x < 1, \\ y(0) &= 1, \end{aligned}$$

har värdet $y(1/2)$ lika med

- ☐ 1
- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ $\frac{3}{2}$
- ☒ 2
- ☐ $\frac{2}{3}$
- ☐ 3
- ☐ något annat

2. Om din kontrollskrivning 2 är godkänd kryssa i här

☐ Kontrollskrivning 2 är godkänd, så uppgift 2 behöver ej lösas.

2a. (2p) Den konstanta vektorn $X_p = a\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ är en konstant lösning till differentialekvationen

$$X'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} X(t) - \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

för a lika med

- ☐ 1
- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ $\frac{3}{2}$
- ☐ 2
- ☐ $\frac{2}{3}$
- ☒ $\frac{1}{3}$
- ☐ något annat.

2b. (2p) Anta att den reella konstanta 2×2 matrisen A har ett egenvärde $5+2i$ med tillhörande egenvektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1-2i \end{bmatrix}$. Då är den allmänna reella lösningen $X : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$ till systemet $X'(t) = AX(t)$, för godtyckliga reella konstanter a och b,

- ☒ $ae^{5t}\begin{bmatrix} \cos(2t) \\ \cos(2t) + 2\sin(2t) \end{bmatrix} + be^{5t}\begin{bmatrix} \sin(2t) \\ \sin(2t) - 2\cos(2t) \end{bmatrix}$
- ☐ $ae^{2t}\begin{bmatrix} \cos(5t) \\ \cos(5t) + 2\sin(5t) \end{bmatrix} + be^{2t}\begin{bmatrix} \sin(5t) \\ \sin(5t) - 2\cos(5t) \end{bmatrix}$
- ☐ $a\begin{bmatrix} \sin(2t) \\ \sin(2t) + 2\cos(2t) \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} \cos(2t) \\ \cos(2t) - 2\sin(2t) \end{bmatrix}$
- ☐ $ae^{5t}\begin{bmatrix} \cos(2t) \\ \cos(2t) + 2\sin(2t) \end{bmatrix}$
- ☐ $be^{5t}\begin{bmatrix} \sin(2t) \\ \sin(2t) - 2\cos(2t) \end{bmatrix}$
- ☐ $ae^{5t}\begin{bmatrix} \cos(2t) + 2\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{bmatrix} + be^{5t}\begin{bmatrix} \sin(2t) - 2\cos(2t) \\ \sin(2t) \end{bmatrix}$

3. Om din kontrollskrivning 3 är godkänd kryssa i här

- ☐ Kontrollskrivning 3 är godkänd, så uppgift 3 behöver ej lösas.

3a. (2p) Anta att 2×2 matrisen A har egenvärdena 1 och -1. Då är lösningen $x(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $t > 0$, till $x'(t) = Ax(t)$, $t > 0$,

- [ ] en stabil sadelpunkt,
- [x] en instabil sadelpunkt,
- [ ] en stabil nod,
- [ ] en instabil nod,
- [ ] en stabil spiral,
- [ ] en instabil spiral,
- [ ] något annat.

3b. (2p) Betrakta differentialekvationen $y'(t) = g\big(y(t)\big)$ med funktionen $g : [-1, 3] \to \mathbb{R}$ enligt Figur 1. Då gäller att för $y(t) \in [-1, 3]$ har differentialekvationen precis

- [ ] noll jämviktslösningar, (d.v.s. ingen kritisk punkt)
- [ ] en stabil jämviktslösning
- [ ] en instabil jämviktslösning
- [ ] en stabil och en instabil jämviktslösning
- [ ] två stabila jämviktslösningar
- [ ] två instabila jämviktslösningar
- [ ] två stabila jämviktslösningar och en instabil jämviktslösning
- [x] två instabila jämviktslösningar och en stabil jämviktslösning

4. Om din kontrollskrivning 4 är godkänd kryssa i här

- [ ] Kontrollskrivning 4 är godkänd, så uppgift 4 behöver ej lösas.

4. (4p) Funktionen

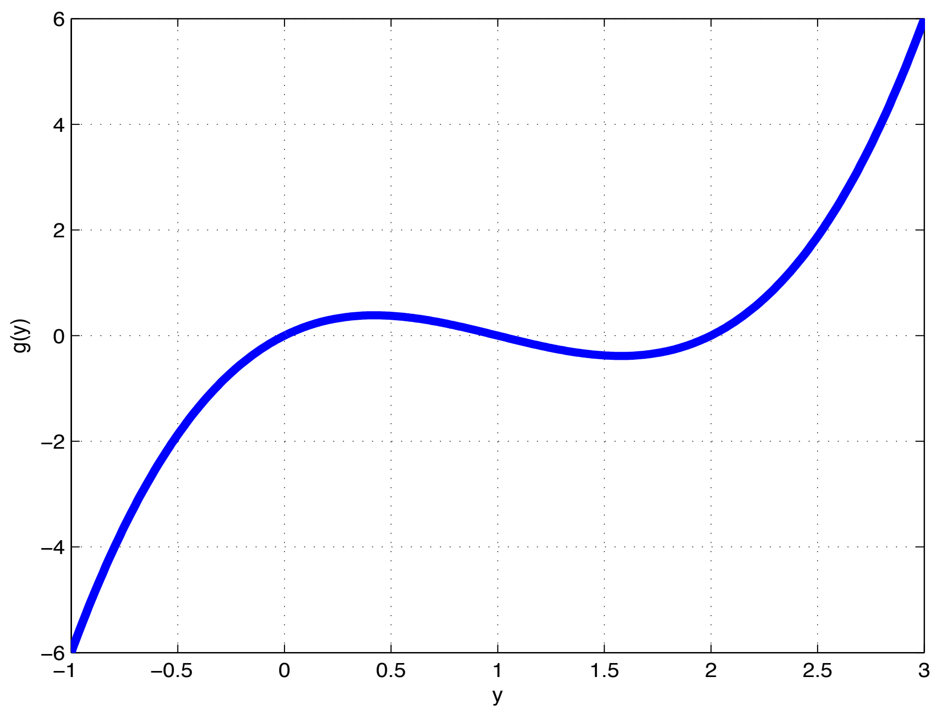
$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & 1 \leq |x| \leq 2, \end{cases}$$

med perioden 4 har Fourierserien

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(n\pi x/2) + b_n \sin(n\pi x/2)\big)$$

där a_1 är lika med

- [ ] 0
- [x] $\frac{2}{\pi}$
- [ ] $\frac{1}{2}$
- [ ] $\frac{\pi}{2}$
- [ ] $\frac{\pi}{4}$
- [ ] något annat.



Figur 1: Funktionen g.

5a. (2p) Ett steg med explicita Eulermetoden (d.v.s. framåt Euler) för approximation av $y(0.1)$, där

$$y'(x) = \big(y(x)\big)^2, \; x > 0,$$
$$y(0) = 1,$$

ger värdet

- [x] 1.10
- [ ] 1.12
- [ ] 1.14
- [ ] 1.15
- [ ] 1.17
- [ ] 1.19
- [ ] 1.20
- [ ] något annat

5b. (2p) Finita differensmetoden

$$-\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{(\Delta x)^2} - \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta x} = 1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, N,$$

med $\Delta x = 1/(N+1)$, där u_n är en approximation av $u\big(n\Delta x\big)$ och $u_0 = 1$ och $u_{N+1} = 0$, ger en approximation av randvärdesproblemet

- [ ] $-u''(x) + u(x) = 1, \; u(0) = 0, u(1) = 1,$
- [x] $-u''(x) - u'(x) = 1, \; u(0) = 1, u(1) = 0,$
- [ ] $-u''(x) + u(x) = 0, \; u(0) = 1, u(1) = 0,$
- [ ] $u''(x) + u'(x) = 1, \; u(0) = 1, u(1) = 0,$
- [ ] $-u''(x) + u'(x) = 0, \; u(0) = 1, u(0) = 0,$
- [ ] $u''(x) + u(x) = 1, \; u(0) = 0, u(1) = 1,$
- [ ] något annat.