Institutionen för Matematik, KTH

Tentamen del 2
Analytiska och numeriska metoder för differentialekvationer SF1523
9.00-12.00 22/8 2016

Formelsamlingen BETA är tillåtet hjälpmedel men ej miniräknare.

Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar.

Del 2 rättas om del 1 är godkänd.

Betygsgränser: D 10, C 20, B 30 och A 40 poäng. Maximalt kan 50 poäng erhållas.

Det finns två alternativa uppgifter 7, varav endast en får lösas.

6. En pendels vinkelutslag, $y(t)$, vid tiden t uppfyller

$$\begin{aligned} y''(t) &= -\sin\big(y(t)\big)\,, \qquad t > 0\,, \\ y(0) &= 0\,, \\ y'(0) &= \frac{1}{10}\,. \end{aligned}$$

6a. (10p) Skriv ekvationen som ett system av första ordningens differentialekvationer och beskriv en metod att bestämma pendelns periodtid med hjälp av lösningen $y(t)$.

6b (5p) Formulera framåt Eulermetoden för att approximera lösningen $y(t)$, $\quad 0 < t < 100$.

6c (5p) Skriv ett Matlabprogram som utför approximationen i uppgift 6b och beräknar pendels periodtid.

6a. Låt

$$\begin{aligned} x_1(t) &= y(t), \\ x_2(t) &= y'(t). \end{aligned}$$

Ekvationen kan då skrivas

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -\sin(x_1(t)) \end{bmatrix}$$

och vi har systemet

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= x_2(t) \\ x_2'(t) &= -\sin(x_1(t)) \end{aligned}$$

med begynnelsedata $x_1(0) = 0$ *och* $x_2(0) = 1/10$.

Periodtiden T_p *kan bestämmas som dubbla tiden det tar till att första gången återvända till begynnelsepositionen* $x_1(T_p/2) = 0$.

6b. Gör indelningen $t_n = n\Delta t$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N$ med tidsteget $\Delta t = 100/N$ och Eulerapproximationen

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1(t_n) \\ \bar{x}_2(t_n) \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} x_1(t_n) \\ x_2(t_n) \end{bmatrix}$$

bestämd av

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1(t_{n+1}) \\ \bar{x}_2(t_{n+1}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t_n) \\ \bar{x}_2(t_n) \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} \bar{x}_2(t_n) \\ -\sin(\bar{x}_1(t_n)) \end{bmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N.$$

6c. Ett exempel på Matlabkod är

```
T=100;           % sluttid
N=1000000;       % antal steg
dt=T/N;          % tidsteg

X=zeros(2,N);    % losningsvektorn
t=zeros(1,N);    % tidstegen

X(:,1)=[0;0.1]; % begynnelsevarden
P=0;             % halva perioden, 0 vid start

for n=1:N-1
    X(:,n+1)=X(:,n)+dt*[X(2,n);-sin(X(1,n))];
    t(n+1)=n*dt;
    if(P==0 &&(X(1,n+1)<0 && X(1,n)>0))  %forsta gangen
        P=n*dt;                           %positionen byter tecken
    end                                   %satt perioden
end
plot(t,X(1,:))  %positionen som funktion av tiden
display('periodtiden ar')
disp(2*P)
```

7. (15p) En svängande sträng med utböjningen $u(x,t)$, i positionen x vid tiden t i ett elastiskt medium, uppfyller vågekvationen

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - u(x,t)\,, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0\,, \qquad t \geq 0.$$

Antag att strängen släpps utan begynnelsefart från läget

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 1/4, \\ 1, & 1/4 \leq x \leq 3/4, \\ 0, & 3/4 < x < 1. \end{cases}$$

Bestäm funktionen $u(x,t)$ som en Fourierserie.

(15p) **Alternativ uppgift 7.**
Formulera den allmänna lösningen till ett linjärt system $X'(t) = AX(t) + F(t)$ av difererentialekvationer, med konstant diagonaliserbar matris A, och motivera detta, t.ex. genom att diagonalisera problemet.

7. Ekvationen lyder

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - u(x,t)\,, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,\\
u(0,t) &= u(1,t) = 0\,, \qquad t \geq 0,\\
u(x,0) &= \begin{cases} 0, & 0 < x < 1/4,\\ 1, & 1/4 \leq x \leq 3/4,\\ 0, & 3/4 < x < 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Variabelseparationsansatsen $u(x,t) = X(x)T(t)$ insatt i ekvationen ger

$$T''(t)X(x) + T(t)X(x) = X''(x)T(t)$$

och

$$\frac{T''(t)}{T(t)} + 1 = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

där vänsterledet bara beror på t och högerledet bara på x. Vänsterledet och högerldet måste då vara lika med en konstant. Kalla den λ. Vi har tre fall: $\lambda = 0$, $\lambda > 0$ och $\lambda < 0$.

$\lambda = 0$: ger $X'' = 0$ och $X(x) = ax + b$. Randvillkoren ger $a = b = 0$ och $X(x) = 0$.

$\lambda > 0$: ger med karakteristiska ekvationens lösning $X = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x}$ och randvillkoren ger $0 = X(0) = a + b$ så $0 = X(1) = a(e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x})$, vilket igen ger $X(x) = 0$.

$\lambda < 0$: ger med karakteristiska ekvationens lösning $X = a\sin(\sqrt{-\lambda}x) + b\cos(\sqrt{-\lambda}x)$. Randvillkoren ger $0 = X(0) = b$ och $0 = X(1) = a\sin(\sqrt{-\lambda})$ så $\sqrt{-\lambda} = n\pi$ där $n \in \mathbb{N}$.

Vi har $X(x) = a\sin(n\pi x)$ och $\lambda = -n^2\pi^2$ med godtyckligt $a \in \mathbb{R}$. Ekvationen för T lyder

$$\frac{T''(t)}{T(t)} + 1 = -n^2\pi^2$$

så med karakteristiska ekvationens lösning blir $T(t) = a\cos(\beta_n t) + b\sin(\beta_n t)$ där $\beta_n = \sqrt{1 + n^2\pi^2}$. Vågekvationens linjaritet ger Fourieransatsen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x)\big(a_n\cos(\beta_n t) + b_n\sin(\beta_n t)\big)\,.$$

Begynnelsevillkoret $\partial u(x,0)/\partial t = 0$ medför att

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x)\big(- a_n\beta_n \sin(\beta_n 0) + b_n\beta_n \cos(\beta_n 0)\big)$$

och vi får $b_n = 0,\ n \in \mathbb{N}$. Det andra begynnelsevillkoret ger

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x)\cos(\beta_n t)\,.$$

Fourierseriens ortogonalitet visar att

$$\begin{aligned} a_n &= 2\int_0^1 u(x,0)\sin(n\pi x)\mathrm{d}x \\ &= 2\int_{1/4}^{3/4} \sin(n\pi x)\mathrm{d}x \\ &= 2\frac{\cos(n\pi/4) - \cos(3n\pi/4)}{n\pi} \end{aligned}$$

som ger svaret

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\pi x)\cos(\beta_n t), \\ \beta_n &= \sqrt{1 + n^2\pi^2}, \\ a_n &= 2\frac{\cos(n\pi/4) - \cos(3n\pi/4)}{n\pi}\,. \end{aligned}$$

8. (15p) Antag att två arter av bytesfiskar med antalen $x(t)$ och $y(t)$, vid tiden t, konkurrerar om födan och uppfyller differentialekvationerna

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t)\big(1.5 - x(t) - 0.5y(t)\big)\,, \\ y'(t) &= y(t)\big(2 - y(t) - 0.75x(t)\big)\,. \end{aligned}$$

Bestäm alla jämviktslösningar (d.v.s. kritiska punkter) och avgör stabilitet eller instabilitet för de jämviktslösningar där båda arter existerar.

8. Jämviktslösningar (x,y) bestäms av

$$\begin{aligned} 0 &= x(1.5 - x - 0.5y) \\ 0 &= y(2 - y - 0.75x) \end{aligned}$$

så

$$\begin{aligned} &\big(x = 0 \ \textit{eller}\ 1.5 - x - 0.5y = 0\big)\ \textit{och} \\ &\qquad \big(y = 0\ \textit{eller}\ 2 - y - 0.75x = 0\big)\,. \end{aligned}$$

Om $x = 0$ *har vi* $y = 0$ *eller* $y = 2$.

Om $x = 1.5 - 0.5y$ *har vi* $y = 0$ *eller* $2 - y - 0.75(1.5 - 0.5y) = 0$. *Detta ger* $(x = 1.5, y = 0)$ *eller* $(x = 4/5, y = 7/5)$. *Jämviktspunkterna är* $(0,0), (0,2), (1.5,0)$ *och* $(4/5, 7/5)$.

Vi studerar jämvikten kring $(4/5, 7/5)$ *genom att betrakta Jacobianen*

$$J(x,y) = \begin{bmatrix} 1.5 - 2x - 0.5y & -0.5x \\ -0.75y & 2 - 2y - 0.75x \end{bmatrix}$$

vilket ger

$$J(4/5, 7/5)) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -21/4 & -7 \end{bmatrix}.$$

Jacobianens egenvärden λ *uppfyller*

$$\begin{aligned} 0 &= (\lambda + 4/5)(\lambda + 7/5) - \frac{42}{100} \\ &= \lambda^2 + \lambda\frac{11}{5} + \frac{28}{25} - \frac{42}{100} \\ &= (\lambda + \frac{11}{10})^2 - \frac{121}{100} + \frac{70}{100} \end{aligned}$$

som ger

$$\lambda = \frac{-11 \pm \sqrt{51}}{10}.$$

Båda egenvärden är negativa, så jämviktspunkten $(4/5, 7/5)$ *är en asymptotisk stabil nod.*