KTH Matematik

Namn: ....

Personnummer:... **Program och årskurs:** ....

Tentamen del 1
Analytiska och numeriska metoder för differentialekvationer SF1523
9.00-12.00 den 22/8 2016

Gränsen för betyg E är 12 poäng. Om kontrollskrivning n är godkänd erhålls 4 poäng på uppgift n, $n = 1, 2, 3, 4$, d.v.s. uppgift $n.a$ och $n.b$ behöver ej lösas.

Beta är tillåtet hjälpmedel men ej miniräknare.
Skriv svaren på detta papper: ett kryss per uppgift.

1. Om din kontrollskrivning 1 är godkänd kryssa i här

☐ Kontrollskrivning 1 är godkänd, så uppgift 1 behöver ej lösas.

1. (4p) Differentialekvationen

$$y'(x) = \frac{x^2}{y(x)}, \quad x > 0,$$
$$y(0) = 2,$$

har värdet $y(1)$ lika med

☐ 1

☐ $\sqrt{\frac{1}{2}}$

☒ $\sqrt{\frac{14}{3}}$

☐ $\sqrt{2}$

☐ $\sqrt{\frac{15}{4}}$

☐ 3

☐ något annat

2. Om din kontrollskrivning 2 är godkänd kryssa i här

☐ Kontrollskrivning 2 är godkänd, så uppgift 2 behöver ej lösas.

2.(4p) Låt A vara matrisen $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$. Då är den allmänna reella lösningen $X : [0,\infty) \to \mathbb{R}^2$ till systemet $X'(t) = AX(t)$, för godtyckliga reella konstanter a och b,

☐ $ae^{-2t}\begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

☐ $a\begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix} + be^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

☐ $ae^{-2t}\begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix} + be^{-2t}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

☐ $ae^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

☐ $ae^{2t}\begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ 1 \end{bmatrix} + be^{-2t}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

☒ $a\begin{bmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \end{bmatrix} + be^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

3. Om din kontrollskrivning 3 är godkänd kryssa i här

☐ Kontrollskrivning 3 är godkänd, så uppgift 3 behöver ej lösas.

3. Systemet

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) - x(t)y(t)\,, \\ y'(t) &= y(t) + 2x(t)y(t)\,, \end{aligned}$$

av differentialekvationer för funktionerna $x : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ och $y : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ har

(2p)

☐ ingen jämviktslösning (d.v.s. kritisk punkt)

☐ en jämviktslösning

☒ två jämviktslösningar

☐ tre jämviktslösningar

☐ fyra jämviktslösningar

☐ fem jämviktslösningar

där en jämviktslösning (d.v.s. kritisk punkt) $(x, y) = (x_p, y_p)$, med $x_p \neq 0$ och $y_p \neq 0$,

(2p)

☐ är en stabil sadelpunkt,

☒ är en instabil sadelpunkt,

☐ är en stabil nod,

☐ är en instabil nod,

☐ är en stabil spiral,

☐ är en instabil spiral,

☐ nej, sådan jämviktslösning saknas.

4. Om din kontrollskrivning 4 är godkänd kryssa i här

☐ Kontrollskrivning 4 är godkänd, så uppgift 4 behöver ej lösas.

4a. (2p) Fourierserien

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(2n\pi x) + b_n \sin(2n\pi x)\big),$$

där $a_n \neq 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, och $b_n \neq 0$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, är reella konstanter, har minsta perioden

☐ 0	☐ 3
☒ 1	☐ 4
☐ 2	☐ 3π
☐ π	☐ 4π
☐ 2π	☐ något annat.

4b. (2p) Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & 1 \leq |x| \leq 2, \end{cases}$$

med perioden 4 har Fourierserien

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(n\pi x/2) + b_n \sin(n\pi x/2)\big)$$

där a_2 är lika med

☒ 0	☐ $\frac{\pi}{2}$
☐ $\frac{2}{\pi}$	☐ $\frac{\pi}{4}$
☐ $\frac{1}{2}$	☐ något annat.

5. (4p) Ett steg med explicita Eulermetoden (d.v.s. framåt Euler) för approximation av $y(0.1)$, där funktionerna $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ och $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ löser systemet av differentialekvationer

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) - x(t)y(t)\,, \\ y'(t) &= y(t) + 2x(t)y(t)\,, \\ x(0) &= 1\,, \\ y(0) &= 1\,, \end{aligned}$$

ger värdet

- ☒ 1.30
- ☐ 1.32
- ☐ 1.34
- ☐ 1.35
- ☐ 1.27
- ☐ 1.29
- ☐ 1.31
- ☐ något annat