KTH Matematik

Namn: ....

Personnummer:.. **Program och årskurs:** ....

Tentamen del 1
Analytiska och numeriska metoder för differentialekvationer SF1523
8.00-11.00 den 29/5 2017

Gränsen för betyg E är 12 poäng. Om kontrollskrivning n är godkänd erhålls 4 poäng på uppgift n, $n = 1, 2, 3, 4$, d.v.s. uppgift $n.a$ och $n.b$ behöver ej lösas.

Beta är tillåtet hjälpmedel men ej miniräknare.
Skriv svaren på detta papper: ett kryss per uppgift och **namn på varje papper**.

1. Om din kontrollskrivning 1 är godkänd kryssa i här

☐ Kontrollskrivning 1 är godkänd, så uppgift 1 behöver ej lösas.

1. (4p) Differentialekvationen

$$\begin{aligned} xy'(x) &= 2y(x), \quad x \geq 1, \\ y(1) &= 1, \end{aligned}$$

har värdet $y(2)$ lika med

☐ 1

☐ $\frac{1}{2}$

☐ $\frac{3}{2}$

☐ 2

☐ $\frac{2}{3}$

☒ 4

☐ något annat

2. Om din kontrollskrivning 2 är godkänd kryssa i här

☐ Kontrollskrivning 2 är godkänd, så uppgift 2 behöver ej lösas.

2. (4p) Den allmänna reella lösningen $x(t)$ och $y(t)$ till systemet

$$x'(t) = x(t) + y(t)\,,$$
$$y'(t) = 4x(t) - 2y(t)\ ,$$

kan skrivas

☒ $x(t) = ae^{-3t} + be^{2t}$, $y(t) = -4ae^{-3t} + be^{2t}$

☐ $x(t) = 4ae^{3t} + be^{2t}$, $y(t) = ae^{3t} + be^{2t}$

☐ $x(t) = 2ae^{-4t} + be^{-2t}$, $y(t) = 3ae^{-4t} + be^{-2t}$

☐ $x(t) = ae^{-3t} + be^{2t}$, $y(t) = -4ae^{2t} + be^{3t}$

☐ $x(t) = 2ae^{-3t} + be^{2t}$, $y(t) = 4ae^{2t} + be^{3t}$

☐ $x(t) = 2ae^{-3t} + be^{2t}$, $y(t) = ae^{2t} + 4be^{3t}$

där a och b är godtyckliga reella konstanter.

3. Om din kontrollskrivning 3 är godkänd kryssa i här

☐ Kontrollskrivning 3 är godkänd, så uppgift 3 behöver ej lösas.

3a. (2p) Betrakta differentialekvationen $y'(t) = g\big(y(t)\big)$ med funktionen $g : [-5, 5] \to \mathbb{R}$ enligt Figur 1. Då gäller att för $y(t) \in [-5, 5]$ har differentialekvationen precis

☐ noll jämviktslösningar, (d.v.s. ingen kritisk punkt)

☐ en stabil jämviktslösning

☐ en instabil jämviktslösning

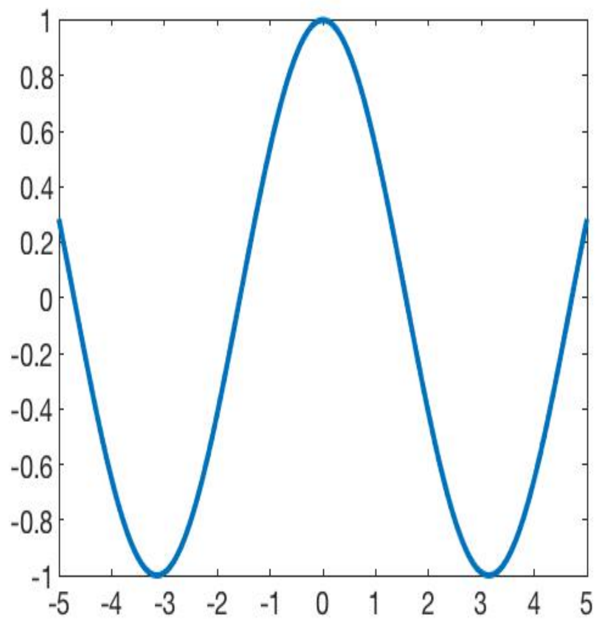
☐ en stabil och en instabil jämviktslösning

☐ fyra stabila jämviktslösningar

☐ fyra instabila jämviktslösningar

☒ två stabila jämviktslösningar och två instabila jämviktslösningar

☐ två instabila jämviktslösningar och en stabil jämviktslösning



Figur 1: Funktionen g.

3b. (2p) Systemet

$$\begin{aligned} x'(t) &= x(t) + y(t)\,, \quad t > 0 \\ y'(t) &= 4x(t) - 2y(t)\ , \quad t > 0 \end{aligned}$$

har precis

- ☐ noll jämviktslösningar, (d.v.s. ingen kritisk punkt)
- ☐ en stabil jämviktslösning
- ☒ en instabil jämviktslösning
- ☐ en stabil och en instabil jämviktslösning
- ☐ två stabila jämviktslösningar
- ☐ två instabila jämviktslösningar
- ☐ två stabila jämviktslösningar och en instabil jämviktslösning
- ☐ två instabila jämviktslösningar och en stabil jämviktslösning

4. Om din kontrollskrivning 4 är godkänd kryssa i här

- ☐ Kontrollskrivning 4 är godkänd, så uppgift 4 behöver ej lösas.

4. (4p) Den 2π periodiska funktionen som på intervallet $[-\pi, \pi]$ ges av

$$f(x) = x, \quad -\pi \le x < \pi,$$

har Fourierserien

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\big)$$

där b_{10} är lika med

- [ ] 0
- [x] $-\frac{1}{5}$
- [ ] $\frac{1}{10}$
- [ ] $\frac{1}{20}$
- [ ] $-\frac{1}{20}$
- [ ] något annat.

5a. (2p) Ett steg med explicita Eulermetoden (d.v.s. framåt Euler) för approximation av $y(1.1)$, där

$$\begin{aligned} xy'(x) &= 2y(x), \ x \ge 1, \\ y(1) &= 1, \end{aligned}$$

ger värdet

- [ ] 1.10
- [ ] 1.12
- [ ] 1.14
- [ ] 1.15
- [ ] 1.17
- [ ] 1.19
- [x] 1.20
- [ ] något annat

5b. (2p) Finita differensmetoden

$$-\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{(\Delta x)^2} - u_n = 1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, N,$$
$$u_0 = 1,$$
$$u_{N+1} = u_N,$$

med $\Delta x = 1/(N+1)$, där u_n är en approximation av $u\big(n\Delta x\big)$ ger en approximation av randvärdesproblemet

- [ ] $-u''(x) - u(x) = 1,\ u(0) = 0, u(1) = 1,$
- [ ] $-u''(x) - u'(x) = 1,\ u(0) = 1, u(1) = 0,$
- [x] $-u''(x) - u(x) = 1,\ u(0) = 1, u'(1) = 0,$
- [ ] $u''(x) + u'(x) = 1,\ u(0) = 1, u(1) = 0,$
- [ ] $-u''(x) + u'(x) = 0,\ u(0) = 1, u(0) = 0,$
- [ ] $u''(x) + u(x) = 1,\ u(0) = 0, u(1) = 1,$
- [ ] något annat.