Institutionen för Matematik, KTH

Tentamen del 2
Analytiska och numeriska metoder för differentialekvationer SF1523
8.00-11.00 29/5 2017

Formelsamlingen BETA är tillåtet hjälpmedel men ej miniräknare.

Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar.

Del 2 rättas om del 1 är godkänd.

Betygsgränser: D 10, C 20, B 30 och A 40 poäng. Maximalt kan 50 poäng erhållas.

Det finns två alternativa uppgifter 7, varav endast en får lösas.

6. Temperaturen $u(x)$ i positionen x av en stav uppfyller värmeledningsekvationen

$$
\begin{aligned}
-u''(x) + u(x) &= x(\pi - x), \quad 0 \le x \le 1, \\
u(0) = u(1) &= 0.
\end{aligned}
$$

6a.(5p) Formulera en finit differensmetod för att approximera temperaturen u.

6b.(10p) Skriv ett matlabprogram som utför approximationen i uppgift 6a och beräknar och skriver ut medelvärdet av temperaturen över staven.

6a. *Låt $x_n = n\Delta x$, för $n = 0, 1, 2, \ldots, N+1$, vara en indelning av intervallet $[0,1]$ där $x_{N+1} = (N+1)\Delta x = 1$, så $\Delta x = 1/(N+1)$. Differensapproximationerna*

$$
\begin{aligned}
u_n &\simeq u(x_n), \\
\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{(\Delta x)^2} &\simeq u''(x_n),
\end{aligned}
$$

insatt i ekvationen ger

$$
\begin{aligned}
-\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{(\Delta x)^2} + u_n &= x_n(\pi - x_n), \quad n = 1, 2, 3, \ldots, N, \\
u_0 = u_{N+1} &= 0.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Ekvationen (1) *kan skrivas på matrisform som* $AU = F$, *med vektorn* $U = \begin{bmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_N \end{bmatrix}$ *och*

$N \times N$ *matrisen* A *där*

$$A_{nm} = \begin{cases} 2/(\Delta x)^2 + 1, & n = m \\ -1/(\Delta x)^2, & |n-m| = 1 \\ 0 & |n-m| \geq 2 \end{cases}$$

och $F = \begin{bmatrix} x_1(\pi - x_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_N(\pi - X_N) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N$.

6b. Ett exempel på Matlabkod är

```
N = 100;
dx= 1/(N+1);
F = zeros(N,1);
U = zeros(N,1);
A = zeros(N,N);
x = zeros(N,1);

for n=2:N-1
    A(n,n)  = 2/(dx*dx) +1;
    A(n,n-1)=  -1/(dx*dx);
    A(n,n+1)=  -1/(dx*dx);
    x(n)=n*dx;
    F(n)=x(n)*(pi-x(n));
end

x(1)=dx;
x(N)=N*dx;
F(1)=x(1)*(pi-x(1));
F(N)=x(N)*(pi-x(N));

A(1,1)=2/(dx*dx)+1;
A(1,2)= -1/(dx*dx);
A(N,N)=2/(dx*dx)+1;
A(N,N-1)= -1/(dx*dx);
```

```
U=A\F;

G=0;
for n=1:N
    G=G+U(n)*dx;
end
display('medelutbojningen ar')
display(G)
```

7. (15p) En svängande sträng med utböjningen $u(x,t)$, i positionen x vid tiden t i ett dämpande medium, uppfyller vågekvationen

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \quad 0 \le x \le \pi, \quad t \ge 0,$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0\,, \qquad t \ge 0.$$

Antag att strängens startläge är $u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le \pi$, och att strängen släpps med begynnelsefarten $\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = x(\pi - x), \quad 0 \le x \le \pi$. Bestäm funktionen $u(x,t)$ som en Fourierserie. Bestäm också en tidpunkt då absolutbeloppet av strängens fart i positionen $x = 1$ säkert är mindre än 0.01.

7. *Ansatsen* $u(x,t) = T(t)X(x)$ *ger*

$$T''(t)X(x) = T(t)X''(x) - T'(t)X(x)$$

och

$$\frac{T''(t)}{T(t)} + \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Eftersom högerledet inte beror på t *och vänsterledet inte beror på* x *måste högerledet och vänsterledet vara lika med samma konstant, som vi kallar* λ.

Om $\lambda = 0$ *får vi* $X'' = 0$ *och lösningen* $X(x) = ax + b$. *Randvillkoren ger* $X(x) = 0$.

Om $\lambda = \alpha^2 > 0$ *får vi genom att lösa med karakteristiska ekvationen* $X(x) = ae^{\alpha x} + be^{\alpha x}$. *Randvillkoren ger* $0 = X(0) = a + b$, *så* $b = -a$ *och* $0 = X(\pi) = a(e^{\alpha\pi} - e^{\alpha\pi})$, *vilket medför att* $a = 0$ *och* $X(x) = 0$ *för alla* x.

Om $\lambda = -\alpha^2 < 0$ *får vi genom att lösa med karakteristiska ekvationen* $X(x) = a\cos(\alpha x) + b\sin(\alpha x)$. *Randvillkoren ger oss* $0 = X(0) = a$ *och* $0 = X(\pi) = b\sin(\alpha\pi)$ *som har lösningen* $\alpha = n, \ n = 1, 2, 3, \ldots$.

Vi har lösningen $X(x) = b\sin(nx)$ *och* $\lambda = -n^2$. *Detta ger oss ekvationen*

$$T''(t) + T'(t) + n^2 T(t) = 0$$

som har karakteristisk ekvation

$$m^2 + m + n^2 = 0$$

så lösningen blir $m = -1/2 \pm \mathrm{i}\sqrt{n^2 - 1/4}$.

Vi får

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t/2}\big(a_n \cos(\beta_n t) + b_n \sin(\beta_n t)\big)\sin(nx)$$

där $\beta_n = \sqrt{n^2 - 1/4}$.

Begynnelsevillkoret

$$0 = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$$

medför att $a_n = 0$ *för alla* n. *Vi har*

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}\big(-\frac{1}{2} b_n \sin(\beta_n t) + b_n\beta_n \cos(\beta_n t)\big)\sin(nx)e^{-t/2}$$

och begynnelsevillkoret

$$x(\pi - x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\beta_n \sin(nx).$$

Då blir

$$\begin{aligned} b_n\beta_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin(nx)\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}([x(\pi - x)\cos(nx)/(-n)]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}(\pi - 2x)\mathrm{d}x) \\ &= \frac{2}{\pi}([(\pi - 2x)\sin(nx)/n^2]_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi}\frac{\sin(nx)}{n^2}\mathrm{d}x) \\ &= \frac{4}{\pi}[\cos(nx)/(-n^3)]_0^{\pi} = \frac{4}{n^3\pi}\big(1 - (-1)^n\big) \end{aligned}$$

Svar: $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-t/2} b_n \sin(\beta_n t)\sin(nx)$, *där*

$$\beta_n = \sqrt{n^2 - 1/4} \text{ och } b_n = \tfrac{4}{n^3\pi\beta_n}(1 - (-1)^n).$$

Vi har

$$
\begin{aligned}
|\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}| &= |\sum_{n=1}^{\infty}\big(-\frac{1}{2}b_n\sin(\beta_n t)+b_n\beta_n\cos(\beta_n t)\big)\sin(nx)e^{-t/2}| \\
&\le e^{-t/2}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{b_n}{2}+b_n|\beta_n|) \\
&\le e^{-t/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\pi n^3}(2+1) \\
&\le e^{-t/2}\frac{24}{\pi}(1+\int_1^{\infty}\frac{\mathrm{d}n}{n^3}) \\
&= e^{-t/2}\frac{24}{\pi}(1+[-\frac{1}{2n^2}]_1^{\infty}) \\
&= e^{-t/2}\frac{36}{\pi}
\end{aligned}
$$

som avtar med växande t. Vi söker då t sådan att

$$e^{-t/2}\frac{36}{\pi}=\frac{1}{100}$$

dvs.

$$t=-2\ln\frac{\pi}{3600}=2\ln\frac{3600}{\pi}\approx 2\ln e^{2.5\times 3}=15.$$

(15p) **Alternativ uppgift 7.**
Formulera och bevisa en sats om stabilitet av en explicit differensmetod för värmeledningsekvationen.

8. (20p) Låt $y(t)$ och $x(t)$ vara antalet rovdjur respektive antalet bytesdjur vid tiden t (mätt i en referensenhet av 1000 djur) med dynamiken

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= x(t)\big(1-\frac{y(t)}{2}\big)\,, \quad t>0, \\
y'(t) &= y(t)\big(-\frac{3}{4}+\frac{x(t)}{4}\big), \quad t>0\,.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Bestäm alla jämviktslösningar (dvs. alla kritiska punkter) och avgör deras stabilitet. Lös också problemet i fallet inga rovdjur, respektive i fallet inga bytesdjur och beskriv med ord vad som sker i dessa två fall.

8. *Jämvikt leder till*

$$x = 0 \qquad \textit{eller} \qquad 1 - \frac{y}{2} = 0 \tag{3}$$

och

$$y = 0 \qquad \textit{eller} \qquad -\frac{3}{4} + \frac{x}{4} = 0\,. \tag{4}$$

Villkoret från (3) insatt i (4) ger $0 = x = y$ eller $(x, y) = (3, 2)$. Vi har alltså jämviktspunkterna $(x, y) = (0, 0)$ och $(x, y) = (3, 2)$.

Vi kan skriva

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(1 - y/2) \\ y(-3/4 + x/4) \end{bmatrix} =: \mathbf{g}(x, y)$$

där Jacobianen $\mathbf{g}'(x, y)$ blir

$$\mathbf{g}'(x, y) = \begin{bmatrix} 1 - y/2 & -x/2 \\ y/4 & x/4 - 3/4 \end{bmatrix}.$$

Vi har

$$\mathbf{g}'(0, 0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3/4 \end{bmatrix}.$$

vars egenvärden 1 och $-3/4$ har olika tecken. Jämviktspunkten $(0, 0)$ är därför en instabil sadelpunkt, både för det linjariserade problemet och det ickelinjära problemet.

Jacobianen

$$\mathbf{g}'(3, 2) = \begin{bmatrix} 0 & -3/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

har egenvärden λ som uppfyller $0 = \lambda^2 + 3/4$ vilket ger två rent imaginära egenvärden $\lambda = \pm \mathrm{i}\sqrt{3}/2$. Det linjariserade systemet har alltå en centrumpunkt för $(x, y) = (3, 2)$, vilket inte avgör stabiliteten för det ickelinjära problemet. Vi behöver därför en specialstudie för att avgöra stabilitet för det ickelinjära problemet.

Fasplansmetoden ger

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{y(-3/4 + x/4)}{x(1 - y/2)}$$

och separation av variabler ger

$$\int \frac{1 - y/2}{y} \mathrm{d}y = \int \frac{-3/4 + x/4}{x} \mathrm{d}x$$

vars lösning är

$$\ln|y| - \frac{y}{2} = C - \frac{3}{4} \ln|x| + \frac{x}{4}. \tag{5}$$

Variabelbytet

$$y = 2 + v$$
$$x = 3 + u$$

medför, med v *och* u *nära noll, i* (5)

$$\ln(2+v) - \frac{v}{2} + \frac{3}{4}\ln(3+u) - \frac{u}{4} = C'$$

för någon konstant C'*. Taylorutveckling av logaritmen ger*

$$\begin{aligned} C' &= \ln(2+v) - \frac{v}{2} + \frac{3}{4}\ln(3+u) - \frac{u}{4} \\ &= \ln 2 + v/2 - v^2/4 + \mathcal{O}(v^3) - v/2 + \frac{3}{4}\ln 3 + u/4 - \frac{3}{4}\frac{u^2}{9} + \mathcal{O}(u^3) - u/4 \\ &= \ln 2 + \frac{3}{4}\ln 3 - v^2/4 - u^2/12 + \mathcal{O}(v^3 + u^3)\,. \end{aligned}$$

Vi har då

(6) $$v^2 + u^2/3 = C + \mathcal{O}(u^3 + v^3)\,.$$

De polära koordinaterna $r \geq 0$ *och* $\alpha \in [0, 2\pi]$ *och definitionen*

$$v = r\cos\alpha$$
$$u/\sqrt{3} = r\sin\alpha$$

ger insatt i (6)

$$r^2 + \mathcal{O}_\alpha(r^3) = C$$

vilket med implicita funktionssatsen definierar en radie $r \simeq \sqrt{C}$ *för alla vinklar* $\alpha \in [0, 2\pi]$ *och* C *positiv nära noll. Här är* $\mathcal{O}(u^3 + v^3) = \mathcal{O}_\alpha(r^3)$*. Vi ser att lösningen är en sluten kurva som närmar sig en ellips då* $C \to 0+$*, vilket medför att* $(3, 2)$ *är en stabil jämviktspunkt.*

Slutligen, om antalet rovdjur $y = 0$ *växer antalet bytesdjur* $x' = x$*, med lösningen* $x(t) = x(0)e^t$*. Om antalet bytesdjur* $x = 0$ *avtar antalet rovdjur* $y' = -0.75y$*, med lösningen* $y(t) = y(0)e^{-3t/4}$*.*