

Namn:

Personnummer:..... Program och årskurs:

Tentamen del 1
Analytiska och numeriska metoder för differentialekvationer SF1523
8.00-11.00 den 18/8 2017

Gränsen för betyg E är 12 poäng. Om kontrollskrivning n är godkänd erhålls 4 poäng på uppgift n , $n = 1, 2, 3, 4$, d.v.s. uppgift $n.a$ och $n.b$ behöver ej lösas.

Beta är tillåtet hjälpmedel men ej miniräknare.

Skriv svaren på detta papper: ett kryss per uppgift och **namn på varje papper.**

1. Om din kontrollskrivning 1 är godkänd kryssa i här

Kontrollskrivning 1 är godkänd, så uppgift 1 behöver ej lösas.

- 1a. (2p) Anta att antalet gram radioaktivt ämne i ett material avtar i tiden med en fart som vid varje tidpunkt t är proportionell mot antalet gram radioaktivt ämne vid tiden t . Om det tar två år att halvera mängden radioaktivt ämne i materialet, hur lång tid tar det att minska mängden radioaktivt ämne till en tredjedel?

$2\frac{2}{3}$ år

$3\frac{\ln 3}{\ln 2}$ år

$3\frac{3}{2}$ år

$2\frac{\ln 3}{\ln 2}$ år

3 år

$2\frac{\ln 2}{\ln 3}$ år

$3\frac{\ln 2}{\ln 3}$ år

något annat

- 1b. (2p) Differentialekvationen

$$y'(x) = 2xy(x) + x^3, \quad x \geq 0,$$

$$y(0) = -\frac{1}{2},$$

har värdet $y(1)$ lika med

- | | |
|---|---|
| <input type="checkbox"/> 1 | <input checked="" type="checkbox"/> -1 |
| <input type="checkbox"/> 2 | <input type="checkbox"/> $\frac{2}{3}$ |
| <input type="checkbox"/> $\frac{1}{2}$ | <input type="checkbox"/> $-\frac{2}{3}$ |
| <input type="checkbox"/> $-\frac{1}{2}$ | <input type="checkbox"/> något annat |

2. Om din kontrollskrivning 2 är godkänd kryssa i här

Kontrollskrivning 2 är godkänd, så uppgift 2 behöver ej lösas.

2. (4p) Det linjära systemet

$$\begin{aligned}x'(t) &= 2x(t) + 3y(t), \\y'(t) &= 2x(t) + y(t),\end{aligned}$$

med begynnelsevärde

$$\begin{aligned}x(0) &= 1, \\y(0) &= -1,\end{aligned}$$

har lösningen

- | | |
|---|--|
| <input checked="" type="checkbox"/> $x(t) = e^{-t}$ | <input type="checkbox"/> $x(t) = e^t$ |
| <input type="checkbox"/> $x(t) = \frac{e^{-t}}{2}$ | <input type="checkbox"/> $x(t) = \frac{e^{-4t}}{2}$ |
| <input type="checkbox"/> $x(t) = e^{4t}$ | <input type="checkbox"/> $x(t) = e^{-4t}$ |
| | <input type="checkbox"/> $x(t) = \text{något annat}$ |

3. Om din kontrollskrivning 3 är godkänd kryssa i här

Kontrollskrivning 3 är godkänd, så uppgift 3 behöver ej lösas.

3a. (2p) Anta att $x_1 \in \mathbb{R}$ är en jämviktslösning (dvs. kritisk punkt) till differentialekvationen

$$x'(t) = f(x(t)), \quad t \geq 0$$

där funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är differentierbar. Då gäller att x_1 är en stabil jämviktslösning om

- | | |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> x_1 är en fixpunkt, dvs. $x_1 = f(x_1)$. | <input type="checkbox"/> $f''(x_1) < 0$. |
| <input checked="" type="checkbox"/> $f'(x_1) < 0$. | <input type="checkbox"/> $f''(x_1) > 0$. |
| <input type="checkbox"/> $f'(x_1) > 0$. | <input type="checkbox"/> $f(x_1) = 0$. |

3b. (2p) Anta att 2×2 matrisen B har egenvärdena -1 och 3 . Då är jämviktslösningen $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $t > 0$, till systemet av differentialekvationer

$$\mathbf{x}'(t) = B\mathbf{x}(t)$$

- | | |
|--|---|
| <input type="checkbox"/> en stabil nod | <input type="checkbox"/> en stabil spiral |
| <input type="checkbox"/> en instabil nod | <input type="checkbox"/> en instabil spiral |
| <input type="checkbox"/> en stabil sadelpunkt | <input type="checkbox"/> något annat |
| <input checked="" type="checkbox"/> en instabil sadelpunkt | |

4. Om din kontrollskrivning 4 är godkänd kryssa i här

- Kontrollskrivning 4 är godkänd, så uppgift 4 behöver ej lösas.

4. (4p) Betrakta funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 3 + \frac{x}{2}, & 0 < x < 4, \\ -3 + \frac{x}{2}, & -4 < x < 0, \end{cases}$$

som också uppfyller $f(x+8) = f(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Funktionen f har en Fourierserie vars summa för $x = 6$ har värdet

- | | |
|--|---------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> 0 | <input type="checkbox"/> 5 |
| <input type="checkbox"/> 6 | <input type="checkbox"/> -5 |
| <input checked="" type="checkbox"/> -4 | <input type="checkbox"/> något annat. |

5. (4p) Ett steg med explicita Eulermetoden (d.v.s. framåt Euler) för approximation av $y'(0.1)$, där

$$y''(x) = -y(x), \quad x \geq 0,$$

och

$$y(0) = 1,$$
$$y'(0) = 0.1,$$

ger värdet

0.15

-0.05

0.10

-0.10

0.05

-0.15

0

något annat