Institutionen för Matematik, KTH

Tentamen del 2
Analytiska och numeriska metoder för differentialekvationer SF1523
8.00-11.00 18/8 2017

Formelsamlingen BETA är tillåtet hjälpmedel men ej miniräknare.

Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar.

Del 2 rättas om del 1 är godkänd.

Betygsgränser: D 10, C 20, B 30 och A 40 poäng. Maximalt kan 50 poäng erhållas.

Det finns två alternativa uppgifter 7, varav endast en får lösas.

6. Temperaturen $u(x)$ i positionen x av en stav uppfyller värmeledningsekvationen

$$\begin{aligned} -u''(x) + u(x) &= f(x), \quad 0 \le x \le 2, \\ u(0) &= 0 \\ u(2) &= 1, \end{aligned}$$

där $f(x) = 10x^2$.

6a.(5p) Formulera en finit differensmetod för att approximera temperaturen u.

6b.(7p) Skriv ett matlabprogram som utför approximationen i uppgift 6a.

6c.(3p) Byt högerledet $f(x)$ mot $10x^2 - (\frac{\sin(u(x))}{10})^2$ och formulera en numerisk metod för detta ickelinjära randvärdesproblem.

6a. *Gör indelningen $x_n = n\Delta x,\ n = 0, 1, 2, \ldots, N+1$ med steglängden $\Delta x = 2/(N+1)$ och approximationen $u_n \simeq u(x_n)$, där u_n uppfyller systemet av finita differensekvationer*

$$\begin{aligned} -\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n+1}}{(\Delta x)^2} + u_n &= f(x_n), \quad n = 1, \ldots, N \\ u_0 &= 0, \\ u_{N+1} &= 1, \end{aligned}$$

med $f(x) = 10x^2$. Vi har de obekanta $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_N)^T$ och ekvationerna kan skrivas $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$ med $N \times N$ matrisen A,

$$A_{mn} = \begin{cases} 2 + \Delta x^2 & \text{om } n = m, \\ -1 & \text{om } |n-m| = 1, \\ 0 & \text{annars}, \end{cases} \qquad n = 1, \ldots N, \quad m = 1, \ldots, N,$$

och högerledet $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$, där $b_n = (\Delta x)^2 10x_n^2,\ n = 1, \ldots, N-1$, och $b_N = 10(\Delta x)^2 x_N^2 + 1$.

6b. *Ett exempel på Matlabkod är*

```
% Finit differensmetod for randvardesproblem
N=100;    %antal frihetsgrader
dx=2/(N+1);    % steglangd
b=zeros(N,1);  % hogerled
u=zeros(N,1);  % obekanta
A=zeros(N,N);  % matris

    for n=1:N    % bilda A,b,
        b(n) = 10*dx^2*(n*dx)^2;
        if n==N
            b(N)=b(N)+1;
        end
        A(n,n)=2+dx^2;
        if n>1
            A(n,n-1)=-1;
        end
        if n<N
            A(n,n+1)= -1;
        end
    end
    u=A\b;              %Ekvationslosning
    x=dx:dx:2-dx;
    plot(x,u)
```

6c. *Högerledet i uppgift a byts nu mot* $\mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{u})$ *där* $\mathbf{g} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ *med* $g_n = 0.01\Delta x^2 \sin^2(u_n)$, $n = 1, \ldots, N$. *De ickelinjära ekvationerna kan skrivas* $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = 0$, *där* $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = A\mathbf{u} - \mathbf{b} + \mathbf{g}(\mathbf{u})$. *Newtons metod blir*

$$\mathbf{u}(k+1) = \mathbf{u}(k) - (\mathbf{F}'(\mathbf{u}(k)))^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{u}(k)), \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

och ett alternativ med fixpunktiterationer (där Jacobianen i Newtonmetoden approximeras av A) är

$$A\mathbf{u}(k+1) = \mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{u}(k)), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

7. En svängande sträng med utböjningen $u(x,t)$, i positionen x vid tiden t, uppfyller vågekvationen

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0\,, \quad 0 \le x \le 2, \quad t \ge 0,$$

med randvillkoren $u(0,t) = u(2,t) = 0$, för $t \geq 0$, och begynnelsevillkoren

$$u(x,0) = 0, \quad 0 < x < 2,$$
$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = x, \quad 0 < x < 2.$$

7a.(10p) Bestäm utböjningen $u(x,t)$. Svaret får innehålla en oändlig summa.

7b.(5p) Bestäm också tidpunkterna t när $u(x,t) = 0$ för all $x \in [0,2]$.

7a. *Variabelseparationsmetodens ansats* $u(x,t) = X(x)T(t)$ *ger i ekvationen*

$$T''(t)X(x) - X''(x)T(t) = 0$$

så

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = konstant = \lambda$$

Ekvationen $X''(x) = \lambda X(x)$ *och negativt* $\lambda = -\alpha^2$ *ger den karakteristiska ekvationen* $m^2 + \alpha^2 = 0$ *med lösningen* $m = \pm i\alpha$ *och*

$$X(x) = A\cos(\alpha x) + B\sin(\alpha x), \qquad \text{för reella konstanter } A, B.$$

Randvillkoren ger $A = 0$ *och* $\sin(2\alpha) = 0$ *som har lösningen* $\alpha = \frac{n\pi}{2}$ *för heltal* n.
Om $\lambda \geq 0$ *har vi bara lösningen* $X(x) = 0$.
Vi får då

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -\frac{n^2\pi^2}{4}$$

så $T(t) = a_n\cos(n\pi t/2) + b_n\sin(n\pi t/2)$ *och* $u(x,0) = 0$ *ger* $a_n = 0$. *Variabelseparationsmetoden har gett oss lösningen*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi t/2)\sin(n\pi x/2)$$

och

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{2} b_n \cos(n\pi t/2)\sin(n\pi x/2).$$

Begynnelsevillkoret $x = \partial u(x,0)/\partial t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n n\pi}{2} \cos(n\pi 0/2)\sin(n\pi x/2)$ *ger Fourierkoefficienterna*

$$
\begin{aligned}
2^{-1} n\pi b_n &= \int_0^2 \sin(n\pi x/2) \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)dx \\
b_n &= \frac{2}{n\pi} \int_0^2 \sin(n\pi x/2) x dx \\
&= \frac{2}{n\pi}\left(\left[-\frac{2\cos(n\pi x/2)}{n\pi} x \right]_0^2 + \underbrace{\int_0^2 \frac{2\cos(n\pi x/2)}{n\pi} dx}_{=0} \right) \\
&= -(\frac{2}{n\pi})^2 (-1)^n 2
\end{aligned}
$$

och lösningen

$$
u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2} \sin(n\pi t/2)\sin(n\pi x/2).
$$

7b. *Villkoret* $u(x,t) = 0$ *för alla* x *ger ekvationerna* $\frac{8(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2} \sin(n\pi t/2) = 0$ *för alla* n*, som gäller om och endast om* t *är jämt heltal.*

(15p) **Alternativ uppgift 7.**
Formulera och bevisa en sats om stabilitet för skalära differentialekvationer

$$
y'(t) = g\big(y(t)\big)
$$

i en jämviktspunkt $y_1 \in \mathbb{R}$.

8. (20p) Anta att antalet ton fisk i en sjö $x : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ bestäms av

$$
x'(t) = \big(1 - x(t)\big)x(t) - c, \quad t \geq 0,
$$

där c anger en konstant fiskefångst per tidsenhet. Hur stort kan c högst vara för att sjön ska ha ett fiskbestånd som inte dör ut.

8. *De kritiska punkterna ger oss relevant information om lösningars asymptotik. De kritiska punkterna löser* $f(x) := (1-x)x - c = 0$ *som ger* $x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - c}$.

Om $c > 1/4$ *finns inga (reella) lösningar och* $x' = f(x)$ *är negativ (bortom noll) med* $\lim_{t\to\infty} x(t) = -\infty$.

Om $c < 1/4$ *och om* $x(0) > \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - c} =: x_-$ *har vi* $\lim_{t\to\infty} x(t) = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - c} =: x_+$ *eftersom* x_+ *är en stabil kritisk punkt (ty* $f'(x_+) < 0$*).*

Om $c < 1/4$ *och om* $x(0) < x_-$ *har vi* $\lim_{t\to\infty} x(t) = -\infty$.

Om $c < 1/4$ *och* $x(0) = x_-$ *har vi* $x(t) = x_-$.

Om $c = 1/4$ *och* $x(0) \geq 1/2$ *har vi* $x(t) \to 1/2$ *och om* $x(0) < 1/2$ *har vi* $x(t) \to -\infty$ $\big($*ty* $x' = -(x - 1/2)^2$ *ger med* $y = x - 1/2$ *att* $y' = -y^2$ *som har lösningen* $y(t) = y(0)/(1 + ty(0))$ *och* $y(0) \geq 0$ *ger* $y(0) \to 0$ *medan* $y(0) < 0$ *ger* $y(t) \to -\infty\big)$.

Vi ser att fiskbeståndet inte dör ut om $c \leq 1/4$ *och* $x(0) \geq x_-$.