Bengt Lindberg
100820

LABORATION 2

DN1241, 1243 Numeriska metoder för D och E

Integral, Bezier och differentialekvationer

Sista bonusdag, se kursplanen. Kom väl förberedd och med ordnade papper till redovisningen. Båda i laborationsgruppen ska kunna redogöra för teori och algoritmer!
Alla numeriska resultat som efterfrågas ska finnas (gärna handskrivna) med lämpligt antal siffror motiverade av tillförlitlighetsbedömningen!

Obs! Uppgifterna behöver inte göras i nummerordning.

1. **Rotationssymmetrisk lur**

   Konturen för en rotationssymmetrisk lur definieras av funktionskurvan

   $$y(x) = e^{-x/3}/(2 - \cos \pi x), \quad 0 \le x \le L.$$

   Luren uppstår genom att kurvan roteras kring x-axeln och rotationsvolymen är $V = \pi \int_0^L y^2\, dx$. Vi önskar beräkna volymen för en lur med längden $L = 2.6$. Börja med trapetsregeln med steglängderna 0.1 och 0.05 och extrapolera en gång så att simpsonvärdet erhålls. Hur många siffror verkar tillförlitliga?
   Pröva sedan MATLABs `quad` med standardtolerans (gör `help quad`).

   En fin tredimensionell lurbild gör man så här: Låt x och f vara **kolumnvektorer** för konturkurvan $y(x)$. Skapa en **radvektor** för rotationsvinkeln $0 \le \varphi \le 2\pi$ med lagom steg, t ex $2\pi/30$. Bilda matriser X, Y och Z:

   ```
   X=x*ones(size(fi)); Y=f*cos(fi); Z=f*sin(fi);
   ```

   Skriv `mesh(X,Y,Z)` som ger en nätfigur eller välj `surf(X,Y,Z)` eller `surfl(X,Y,Z)` som ger en fylld 3D-figur (gör gärna `help surfl`). Verkar beräknad volymen stämma överens med figuren?

   Uppgift 1 godkänd (datum, lärarsign): ....

2. **Lurig differentialekvation**

   Givet är differentialekvationsproblemet

   $$y'' + \pi y\, e^{x/3}\,(2y' \sin \pi x + \pi y \cos \pi x) = y/9, \quad y(0) = 1,\; y'(0) = -1/3.$$

   a) Inför nya variabler $u_1 = y$ och $u_2 = y'$ så att differentialekvationen kan skrivas till ett system av två första ordningens ODE. Utnyttja MATLABs `ode45` för numerisk lösning fram till $x = 2.6$. Använd en relativ tolerans på 10^{-6}. (`mopt=odeset('RelTol',1.E-6);`,), Gör

`help ode45` för mer information.
Rita upp lösningskurvan och jämför den med lurkonturen i uppgift 1.

b) Om man utöver u_1 och u_2 inför u_3 med egenskapen $du_3/dx = \pi y^2 = \pi u_1^2$, med $u_3(0) = 0$, så får systemet tre första ordningens differentialekvationer.
Vilken innebörd har den nytillkomna ekvationen? Lös med `ode45` med toleransen ovan och skriv ut det numeriska värdet av u_3 vid $x = 2.6$. Verkar det bekant? Förklara den geometriska innebörden av resultatet.

Matlabs `ode45` har standardtoleransen reltol $= 10^{-3}$ som används om man inte tar med toleransparametern i funktionsanropet. Pröva detta och skriv ut värdet av u_3 vid $x = 2.6$. Vad är din kommentar till resultatet?

Uppgift 2 godkänd (datum, lärarsign): ....

3. **Kaustikan approximerad av bézierkurva**

Nu gäller det kaustikan igen och vi vill approximera kaustikakurvan med en kubisk bézierkurva som börjar i punkten (1, 0) och slutar i punkten (0, 0.5). Styrpunkterna placeras vid $\mathbf{b} = (1.0,\ y_b)$ och $\mathbf{c} = (0.12,\ y_c)$ där y_b och y_c ligger mellan 0.5 och 1. Pröva dig fram till lämpliga värden för y_b och y_c (två decimaler räcker) så att approximationen blir bra.
Gör gärna en bézierkurvemun på kaustikagubben och cirklar som ögon.

Uppgift 3 godkänd (datum, lärarsign): ....

4. **Bézierfigur med kalligrafieffekt**

Konstruera ett hjärta (helst lite osymmetriskt) eller din sektionsbokstav (δ, ε) eller en delfin, fjäril, ... (fritt fram för fantasifulla former) med hjälp av några kvadratiska eller kubiska bézierkurvor.
Gör först för hand en skiss av din önskade figur och markera lämpliga interpolationspunkter — några placeras t ex där kurvan lutar vertikalt eller horisontellt. Skriv ett program och modellera fram en formskön bézierkurvefigur. Lagra alla beräknade x- och y-värden i varsin vektor, säg `X` och `Y`.
Kalligrafieffekt får man genom att förskjuta hela kurvan en aning snett uppåt (med pyttelitet `d`-värde) och rita om den många gånger (tjugo eller kanske fler) enligt: `for k=1:20, plot(X+k*d, Y+k*d), end`

Uppgift 4 godkänd (datum, lärarsign): ....

5. **Icke-linjärt randvärdesproblem** Problemet

$$\frac{d^2u}{dx^2} - x^2u(u-1) = 0, \quad u(1) = 2, u(3) = 4$$

skall lösas med finitadifferensmetod med intervallet $1 \leq x \leq 3$ delat i N+1 lika delintervall. Skriv upp differensapproximationer för differentialekvationen i de N inre punkterna. Skriv ekvationerna $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$. Som kontroll är det bra att på papper i detalj ställa upp problemet med N=3 och även rita upp diskretiseringspunkterna.

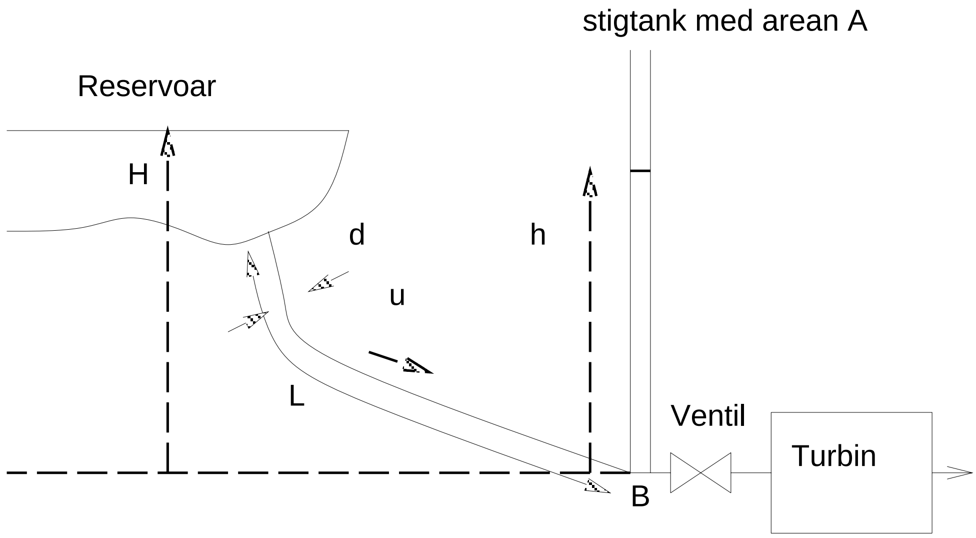
Skriv en Matlabfunktion som för givet $\mathbf{u}$ beräknar $\mathbf{f}(\mathbf{u})$. Ingen matris skall ställas upp eller användas!

Skriv därefter ett Matlabprogram som löser ekvationssystemet

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$$

med Newton iteration och Jakobianmatris beräknad med rutinen `minjac` från kursbiblioteket. Hur gissar ni startvärden? Hur många iterationer behövs? Gör beräkningar med olika N-väden och uppskatta diskretiseringsfelet med hjälp av dessa beräkningar.

6. **Stängning av ventil, differentialekvationssystem**
Vid en vattenkraftstation matas en turbin med vatten från reservoaren (den uppdämda floden) via en cirkulär förbindelseledning (enligt den schematiska figuren nedan).



Vid t.ex. turbinhaveri behöver ventilen stängas snabbt. För att undvika onödiga tryckökningar används därför en stigtank med tvärsnittsytan A m^2. Vi skall studera stigtankens inverkan på tryckstegringen.

Följande beteckningar används

u(t)	vattenhastigheten i förbindelseledningen	m/sek
h(t)	vattenhöjd i stigtanken	m
H	fallhöjd från reservoar till ventil	30 m
L	förbindelseledningen längd	600 m
d	förbindelseledningen diameter	0.6 m
A	stigtankens area	m^2
g	tyngdaccelerationen	9.81 m/sek^2
f_M	friktionskoefficient	0.024

För medelhastigheten $u(t)$ gäller följande differentialekvation

$$L\frac{du}{dt} = g(H-h) - \frac{1}{2}f_M\frac{L}{d}u|u|$$

Vidare gäller att inflödet vid punkt B är lika med utflödet från punkt B:

$$\frac{\pi d^2}{4}u = A\frac{dh}{dt} + Q_v$$

Flödet Q_v genom ventilen under stängningsförloppet $0 \leq t \leq t_c$ ges enligt

$$Q_v = k(1-\frac{t}{t_c})\sqrt{h-h^*}$$

För ventilen gäller k=1.05 m$^{2.5}$/s, h^*=20 m, $t_c = 5$ sek.

Beräkna $h(t)$ så länge som något intressant pågår. Pröva med olika värden på A, A=1, 2, 4,10 m^2.

Börja med att bestämma h, u och Q_v då ventilen är och har varit helt öppen en längre tid (jämvikt). Detta kan ni göra genom att anta att $du/dt = 0$ och $dh/dt = 0$ och succesivt beräkna h och u. Dessa beräkningar kan göras analytiskt. De två teknologerna Slarver Da och Fixarsig Fy har var för sig genomfört beräkningarna och kommit fram till följande resultat:

I.

$$u_0 = \sqrt{\frac{gH}{gC_1 + C_2}} \qquad \text{där} \quad C_1 = \left(\frac{\pi d^2}{4k}\right)^2$$

$$h_0 = h^* + C_1\frac{gH}{gC_1 + C_2} \qquad \text{och} \quad C_2 = \frac{1}{2}f_M\frac{L}{d}$$

II.

$$h_0 = \frac{gH + Ch^*}{g + C}, \quad u_0 = \frac{4k\sqrt{h_0 - h^*}}{\pi d^2} \quad \text{där} \quad C = \frac{1}{2}f_M\frac{L}{d}\frac{16k^2}{\pi^2 d^4}$$

Härled även du uttryck för h_0 och u_0. Har någon av teknologerna räknat rätt? Låt datorn kontrollera startvärden för u och h genom att lösa differentialekvationsproblemet med beräknade startvärden vid $t = -5$. Hur skall lösningern se ut för $-5 \leq t \leq 0$? Låt ventilen börja stängas vid $t = 0$ och följ lösningen tillräckligt länge, så att ni åtminstone kan observera den maximala stighöjden. Observera att efter t_c sekunder så är ventilen helt stängd, d.v.s.

$$Q_v = \begin{cases} k\sqrt{h - h^*} & t \leq 0 \\ k(1 - \frac{t}{t_c})\sqrt{h - h^*} & 0 \leq t \leq t_c \\ 0 & t \geq t_c \end{cases}$$

Redovisa grafer över h och u för de olika A-värden. Lägg gärna graferna i samma figur.

Hur många timmar ungefär har Laboration 2 tagit?

DN1241, 1243, Num met för D, E **Laboration 2 redovisad och godkänd!**

Datum: ....

Namn:.. Godkänd av ....