LABORATION 2

Integraler, ekvationer, differentialekvationer

Vid redovisningen ska båda i laborationsgruppen kunna redogöra för teori, algoritmer och resultat! Var väl förberedda så att varje delredovisning går snabbt och smidigt (kurvor utskrivna, numeriska resultat noterade – gärna handskrivna i marginalen på detta papper).

1. **Numerisk integration: rotationssymmetrisk lur**

   Konturen för en rotationssymmetrisk lur definieras av funktionskurvan

   $$y(x) = e^{-x/3}/(2 - \cos \pi x), \quad 0 \leq x \leq L.$$

   Luren uppstår genom att kurvan roteras kring x-axeln och rotationsvolymen är $V = \pi \int_0^L y^2\,dx$. Vi önskar beräkna volymen för en lur med längden $L = 2.6$. Börja med trapetsregeln med steglängderna 0.1 och 0.05 och extrapolera en gång så att Simpson-värdet erhålls. Hur många siffror verkar tillförlitliga?
   Pröva sedan MATLABs `quad` med standardtolerans (gör `help quad`).

   En fin tredimensionell lurbild gör man så här: Låt `x` och `f` vara ***kolumnvektorer*** för konturkurvan $y(x)$. Skapa en ***radvektor*** `fi` för rotationsvinkeln $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ med lagom steg, t ex $2\pi/30$. Bilda matriser `X, Y` och `Z`:

   ```
   X=x*ones(size(fi)); Y=f*cos(fi); Z=f*sin(fi);
   ```

   Skriv `mesh(X,Y,Z)` som ger en nätfigur eller `surf(X,Y,Z)` eller `surfl(X,Y,Z)` som ger en fylld 3D-figur. Prova `shading interp` och olika färg-skalor (`help colormap`).

2. **Integral med förbehandling**. Integralen

   $$I = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-x^2}}{x^2} dx$$

   ska beräknas numeriskt med totalt fel mindre än 10^{-4}. Genomför först en analytisk förbehandling så att det transformerade problemet kan lösas numeriskt. Ledning:
   1) undersök vilket värde integranden får för $x = 0$
   2) Gör "svanskapning" för att bestämma vilket ändligt intervall $[0, N]$ som behövs för att bidraget från "svansen" ska bli tillräckligt liten.
   3) Visa, att $I = \sqrt{\pi}$. Det får anses känt, att $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. Om inte kommer det att vara känt efter kursen i sannolikhetslära.
   Redovisa den analytiska förbehandlingen!

Deluppgift 1 och 2 godkända (datum, lärarsign): ....

3. **Differentialekvationer - begynnelsevärdesproblem**

   Givet är differentialekvationsproblemet

   $$y'' + \pi y\, e^{x/3}\,(2y' \sin \pi x + \pi y \cos \pi x) - y/9 = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1/3.$$

   Inför nya variabler $u_1 = y$ och $u_2 = y'$ så att differentialekvationen kan skrivas om till ett system av två första ordningens ODE. Utnyttja MATLABs `ode45` för numerisk lösning fram till $x = 2.6$. Använd en relativ och absolut tolerans på tol, $tol = 10^{-6}$. Gör `help odeset` för att se hur man sätter toleranser.

- Rita upp lösningskurvan i samma diagram som lurkonturen från uppgift 1. Visa (papper och penna, eller kanske Maple eller Wolfram Alpha eller ...) att lösningen till begynnelsevärdesproblemet verkligen ger lurkonturen.
- För $^{10}log(tol) = -3, -4, -5, -6, ..., -10$, beräkna $y(2.6)$ och hur många steg `ode45` tog. Gör en tabell med tol, fel, och antal steg. Plotta fel mot antal steg i loglog-diagram. Stämmer det med 45 i `ode45`?

  Not:
  Av detta drar man slutsatsen, att den satta toleransen **INTE** ger en gräns för felet i lösningen. För en bra implementering av steglängds-regleringen gäller följande: För den numeriska lösningen $y(x; tol)$ beräknad med absolut-tolerans tol finns en positiv funktion $K(x)$ sådan att

  $$|y(x) - y(x; tol)| < K(x) \cdot tol$$

  För bedömning av felet från ode45 måste man alltså köra problemet med flera toleranser.
- Om man utöver u_1 och u_2 inför u_3 med egenskapen $du_3/dx = \pi u_1^2$, med $u_3(0) = 0$, så får systemet tre första ordningens differentialekvationer. Vilken innebörd har den nytillkomna ekvationen, dvs. vad betyder u_3? Lös med `ode45` med toleransen ovan och skriv ut det numeriska värdet av u_3 vid $x = 2.6$. Verkar det bekant?

4. **Differentialekvationer – Randvärdesproblem**

Följande differentialekvationsproblem beskriver temperaturfördelningen $T(x)$ i en cylindrisk stav av längden L och med tvärsnittsarean A och omkretsen p

$$-\frac{d}{dx}(Ak\frac{dT}{dx}) = AQ(x) + \alpha p(T_{ext} - T(x)), \quad T(0) = T_0, \quad T(L) = T_L \tag{1}$$

Vänster och höger ändpunkt på staven har den konstanta temperaturen T_0 resp T_L och staven kyls med värmeövergångstalet α . Konstanten k är stavens värmeledningsförmåga och $Q(x)$ är den värmemängd som per tidsenhet och volymsenhet genereras i staven, t ex genom radioaktivitet.

Antag att staven har 1 x 2 cm^2 rektangulärt tvärsnitt, $L = 1$ m, $k = 2.5$ W/K/m, $\alpha = 1$ W/m^2/K, $T_0 = 100$ C, $T_L = 20$ C, $T_{ext} = 10$ C och $Q(x)$ W/m^3 är

$$Q(x) = \frac{1000}{w\sqrt{2\pi}} e^{-(\frac{x-0.5L}{w})^2}, \qquad 0 \le x \le L$$

där w är bredden på värmekällan. Tag $w = 0.2L$. Differentialekvation och randvillkor (1) kan lösas numeriskt med finita differensmetoden. Diskretisering av intervallet $[0, L]$ enligt $x_i = ih, i = 0, 1, 2, \ldots, n, n+1$, där $h(n+1) = L$ och centraldifferens-approximerad andraderivata ger

$$\frac{-T_{i-1} + 2T_i - T_{i+1}}{h^2} + c_1 T_i = \frac{1}{k} Q(x_i) + c_2, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3}$$

Diskretiseringen leder till ett linjärt ekvationssystem

$$\mathbf{AT} = \mathbf{b} \tag{4}$$

där $\mathbf{A}$ är en $n \times n$-matris, $\mathbf{T}$ är en $n \times 1$-vektor med temperaturvärden i det inre av intervallet och $\mathbf{b}$ är en $n \times 1$-vektor som beror av bl.a. randvärdena T_0 och T_L samt $Q(x_i)$-värdena.

a) Bestäm konstanterna c_1, c_2 uttryckta i de andra storheterna.

b) Skriv ner matrisen $\mathbf{A}$ för $n = 4$ med **papper och penna**. Vilken struktur har $\mathbf{A}$?

c) Skriv ett MATLAB-program som löser randvärdesproblemet. Det ska gå lätt att ändra parametrarna L, k, w, α, ... etc. Matrisen $\mathbf{A}$ kommer endast att ha ett fåtal noll-skilda element. Matrisen skapar du t ex på följande sätt:

```
e = ones(n,1); A = spdiags([-e (2+h2*c1)*e -e], -1:1, n,n)/h2;
```

Kommandot `spdiags` skapar *glesa* matriser. Gör (`help spdiags`) ' för mer information.

- Med MATLAB-satsen `Afull=full(A)` skrivs matrisen $\mathbf{A}$ ut på vanlig form. Gör det för $n = 4$ och jämför med resultatet i uppgift a).
- Räkna ut temperaturen $\mathbf{T}$ för $n = 30$. Lösningen får du genom att lösa det linjära ekvationssystemet $\mathbf{AT} = \mathbf{b}$ i Matlab med \.
- Plotta temperaturen och Q som funktioner av x på **hela** intervallet $0 \leq x \leq L$. Lösningsvektorn $\mathbf{T}$ innehåller inte temperaturen i randpunkterna. Använd matlabs `plotyy` som plottar kurvor mot en y-skala till höger och en till vänster.
- Beräkna temperaturen mitt på stången $T_{0.5}(h)$ för $h = L/10, L/20, L/40, L/80$ och skriv ut en tabell över de erhållna värdena. Visa, att hypotesen $T_{0.5}(h) - T(0.5L) \approx Ch^p$ stämmer för $p = 2$. Extrapolera en gång coh uppskatta felet i det bästa värdet.
- Tag nu $\alpha = 0$. Prova vad som händer när du väljer w allt mindre. Observera, att den totala effekten är oberoende av w. Varför måste man ta $h << w$? När w är mycket liten blir diff-ekvationen $d^2T/dx^2 = 0$ utom runt $x = 0.5L$. Visa, att det stämmer med den numeriska lösningen.

5. **Skärning mellan ellipser, ickelinjärt ekvationssystem**

   Beräkna alla skärningspunkter mellan den sneda ellipsen som definieras av

$$0.4x^2 + y^2 - xy = 10$$

och den ellips med centrum i (4, 2) och halvaxlarna $a = 4$ och $b = 6$ (parallella med koordinataxlarna) som beskrivs av

$$(x-4)^2/a^2 + (y-2)^2/b^2 = 1.$$

Du kan antingen reducera problemet till en skalär ekvation, genom att skriva den ax-elparallella ellipsen på parameterform, eller lösa det icke-linjära ekvationssystemet. Ellipserna ska ritas. Uppritningen av den sneda ellipsen görs enklast med polär form $x = x(\phi), y = y(\phi)$. De erhållna skärningspunkterna markeras med en ring. Hur är det med egenskapen kvadratisk konvergens i din algoritm? Skriv ut en tabell som visar kvadratisk konvergens.

Laboration 2 redovisad och helt klar!

Datum: ....

Godkänd av: ....

Namn: ....