Institutionen för Matematik, KTH

Tentamen del 2
Numeriska metoder SF1545
8.00-11.00 13/3 2014

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar.

Del 2 rättas om del 1 är godkänd.

Betygsgränser: D 10, C 20, B 30 och A 40 poäng.

Det finns två alternativa uppgifter 3.

1. Givet är en differentialekvation

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \sin(\frac{dy}{dt}) + \gamma y = 0, \quad y(0) = 1, \quad \frac{dy}{dt}(0) = 0$$

där γ är en parameter (oberoende av t).

(a) **[4p]** Skriv om differentialekvationen som ett system av första ordningens differentialekvationer på vektorform, dvs.

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = f(t, \mathbf{u}).$$

(b) **[7p]** Skriv en MATLAB-funktion som tar parametern γ som argument, och returnerar en approximation till $y(1)$, beräknad med Eulers metod med steglängd $h = 0.001$.

(c) **[7p]** Vi vill hitta ett värde på γ som ger $y(1) = 0$. Skriv ett MATLAB-program som med intervallhalveringsmetoden eller sekantmetoden bestämmer detta värde. Programmet kan anropa den funktion du konstruerat i uppgift (b). En lösning ligger i närheten av $\gamma = 3$.

Låt $\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}$. *Då blir ekvationen*

$$\boldsymbol{u}'(t) = \begin{bmatrix} u_2(t) \\ -\sin u_2(t) - \gamma u_1(t) \end{bmatrix} =: f\big(t, \boldsymbol{u}(t)\big)\,.$$

Ett exempel på matlabfunktion är

```
function y1= eulerg( gamma )
h=0.001; %steglangd
N=1/h;
u=[1;0];
for n=1:N
    u=u+h*[u(2);-sin(u(2))-gamma*u(1)];
end
y1=u(1);
end
```

och ett exempel på intervallhalvering är

```
g0=2.5; %startvarde
g1=3.5; %startvarde
f0=eulerg(g0); %motsvarande funktionsvarde
f1=eulerg(g1);
N=20;   % antal intervallhalveringar
if(f0*f1>0)
    error('startfunktionsvarden med samma tecken')
end
for n=1:N
    g=(g0+g1)*0.5;
    fx=eulerg(g);
    if(f0*fx<0)
        g1=g;
        f1=fx;
    else
        g0=g;
        f0=fx;
    end
end
disp('gamma=')
disp(g)
```

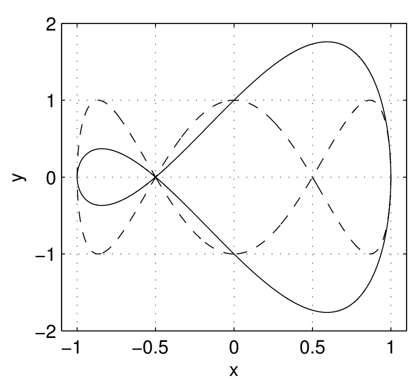
2. Följande två kurvor är givna:

$$x(t) = \sin(t)$$
$$y(t) = \sin(2t) + \cos(t)$$

och

$$x(s) = \sin(s)$$
$$y(s) = \cos(\alpha s).$$

För $\alpha = 3$ är kurvorna plottade i figuren bredvid.



(a) **[3p]** Visa att när $\alpha = 3$ har kurvorna en skärningspunkt för $t = 2\pi$ och $s = 2\pi$. Ange x och y-koordinaten för punkten.

(b) **[6p]** Vi ska nu hitta en skärningspunkt när $\alpha = 3.01$. Formulera problemet som ett olinjärt ekvationssystem i två variabler.

(c) **[7p]** Skriv ett MATLAB-program som med Newtons metod bestämmer en lösning.

Vi har $\big(x(2\pi), y(2\pi)\big) = (\sin 2\pi, \sin 4\pi + \cos 2\pi) = (0, 1)$ *i första kurvan och* $\big(x(2\pi), y(2\pi)\big) = (\sin 2\pi, \cos 6\pi) = (0, 1)$ *i andra kurvan.*

Ekvationssystemet lyder

$$\sin t - \sin s = 0$$
$$\sin 2t + \cos t - \cos(\alpha s) = 0$$

vilket för $y = (t, s)$ kan skrivas

$$f(y) = \begin{bmatrix} \sin y_1 - \sin y_2 \\ \sin 2y_1 + \cos y_1 - \cos(\alpha y_2) \end{bmatrix} = 0$$

och Jacobianen blir

$$f'(y) = \begin{bmatrix} \cos y_1 & -\cos y_2 \\ 2\cos 2y_1 - \sin y_1 & \alpha \sin(\alpha y_2) \end{bmatrix}$$

så Newtonsteget är: lös $f'(y)d = f(y)$ och låt $y = y - d$.

Ett exempel på matlaprogram är

```
%Newtons metod for skarande kurvor
alfa=3.01;     %parameter
y=[2*pi;2*pi]; %startgissning
tol=1e-10;     %tolerans
r=norm(y);
while r>tol
    f =[sin(y(1))-sin(y(2)); sin(2*y(1))+cos(y(1))-cos(alfa*y(2))] %funktion
    fp=[cos(y(1)), -cos(y(2));
        2*cos(2*y(1))-sin(y(1)), alfa*sin(alfa*y(2))]; %Jacobian
    d=fp\f;
    y=y-d;                                         %Newtonsteg
    r=norm(d);                                     %andring i y
end
disp('(t,s)')
disp(y)
```

Uppgift 3 **eller** den alternativa uppgiften får göras, inte båda!

3. (16p) Betrakta potensmetoden

```
function [lam,u]=powerit(A,x,k)
for j=1:k
     u=x/norm(x);
     x=A*u;
     lam=u'*x;
end
u=x/norm(x);
```

`end`

Låt funktionens indata vara $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ och $x = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Bestäm asymptotiska värden av matlabfunktionens utdata när k växer mot oändligheten och avgör konvergenshastigheten (d.v.s. feluppskattning).

Matrisen A har egenvärden λ som uppfyller

$$0 = det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -4 \\ 2 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (5-\lambda)(-1-\lambda) + 8 = (\lambda-2)^2 + 3 - 4$$

vilket ger lösningarna $\lambda = 1$ och $\lambda = 3$. Motsvarande egenvektorer $\boldsymbol{v}_i = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ger

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

så $\boldsymbol{v}_1 = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och normalisering ger $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 2^{-1/2} \\ 2^{-1/2} \end{bmatrix}$ för $\lambda = 1$ och

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

så $\mathbf{v}_2 = b \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ och normalisering ger $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \times 5^{-1/2} \\ 5^{-1/2} \end{bmatrix}$ för $\lambda = 3$.

Vi har då

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2^{-1/2} & 2 \times 5^{-1/2} \\ 2^{-1/2} & 5^{-1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

där

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{-10^{-1/2}} \begin{bmatrix} 5^{-1/2} & -2 \times 5^{-1/2} \\ -2^{-1/2} & 2^{-1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \times 2^{1/2} \\ -2 \times 5^{1/2} \end{bmatrix}.$$

Vi ser att utdata `u` efter k potensiterationer har samma riktning som $A^k\boldsymbol{x}$ där

$$A^k\boldsymbol{x} = c_1\lambda_1^k\boldsymbol{v}_1 + c_2\lambda_2^k\boldsymbol{v}_2 = 3^k(c_1 3^{-k}\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2)$$

dvs $A^k x$ är asymptotiskt parallell med $\boldsymbol{v}_2$, för stora k, och

$$\mathtt{u} = \frac{A^k x}{\|A^k x\|} = \frac{c_2 v_2 + c_1 3^{-k}\boldsymbol{v}_1}{\sqrt{c_2^2 + c_1^2 3^{-2k} + 2c_1c_2 3^{-k}\boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{v}_2}} = \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{\alpha}_k$$

där $\|\boldsymbol{\alpha}_k\| = \mathcal{O}(3^{-k})$, så $\|\boldsymbol{u}_k - \boldsymbol{v}_2\| = \mathcal{O}(3^{-k})$. Utdata `lam` blir asymptotiskt det största egenvärdet

$$\begin{aligned} \mathtt{lam} &= \boldsymbol{u}_{k-1}^T A\boldsymbol{u}_k = (\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{\alpha}_{k-1})^T A(\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{\alpha}_k) \\ &= \boldsymbol{v}_2^T A\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{\alpha}_{k-1}^T A\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_2^T A\boldsymbol{\alpha}_k + \boldsymbol{\alpha}_{k-1}^T A\boldsymbol{\alpha}_k \\ &= \lambda_2 + \mathcal{O}(3^{-k}) = 3 + \mathcal{O}(3^{-k}). \end{aligned}$$

Alternativ uppgift 3. (16p) Formulera och bevisa en sats om konvergens av Newtons metod.

Se sats 1.11 i kursboken