Institutionen för Matematik, KTH

Tentamen del 2
Numeriska metoder SF1545
8.00-11.00 10/4 2015

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar.

Del 2 rättas om del 1 är godkänd.

Betygsgränser: D 10, C 20, B 30 och A 40 poäng.

Det finns två alternativa uppgifter 3.

1a. (9p) Antag att antalet fiskar $y(t)$ vid tiden t i en population som fiskas med det konstanta relativa uttaget $\alpha = 5/2$ uppfyller differentialekvationen

$$y'(t) = y(t)\big(5 - y(t)\big) - \alpha y(t)\,, 0 < t < T$$

Skriv en matlabfunktion som beräknar Eulerapproximationen av y, för givet begynnelsevärde $y(0)$, tidsteg Δt och sluttid T (som är heltalsmultipel av Δt), samt visar en figur med approximationen.

1b. (5p) Modifiera programmet i uppgift 1a för att också approximera det totala antalet fiskar som fångas i tidsintervallet $t \in [0, 2]$ om $y(0) = 2$.

1c. (4p) Avgör noggrannhetsordningen i Δt av resultatet i uppgift 1b och motivera svaret från teorin.

1a. Ett exempel på matlabprogram är

```
function euler_fish(y0,dt,T)
%Eulerapproximation av y'=y(5-y)-ay i intervallet [0,T]
%med begynnelsvarde y(0)=y0, tidsteg dt och sluttid T
N=1+T/dt;
y=zeros(N,1);
t=zeros(N,1);
for n=1:N
    t(n)=(n-1)*dt;           %indelning
end
y(1)=y0;
a=5/2;                        %relativt fiskeuttag
for n=1:N-1
    z=y(n);
    y(n+1)=z+dt*z*(5-a-z);  %Eulerapproximation
```

```
end
plot(t,y);
end
```

1b. Ett exempel på matlabprogram är

```
function Y = euler_fiske(y0,dt,T)
%Eulerapproximation av y'=y(5-y)-ay i intervallet [0,T]
%med begynnelsvarde y(0)=y0, tidsteg dt och sluttid T
%och total fangst Y=sum_{n=1}^{T/dt}ay((n-1)dt) dt
N=1+T/dt;
y=zeros(N,1);
t=zeros(N,1);
for n=1:N
    t(n)=(n-1)*dt;          %indelning
end
y(1)=y0;
a=5/2;                       %relativt fiskeuttag
Y=0;                         %antal fangade fiskar
for n=1:N-1
    z=y(n);
    Y=Y+a*z*dt;             %fangst per tidsenhet vid tiden t(n)
    y(n+1)=z+dt*z*(5-a-z);  %Eulerapproximation
end
plot(t,y);
end
```

1c. Vi vet att Eulermetoden har noggrannhetsordningen $\mathcal{O}(\Delta t)$. För att också uppskatta noggrannheten i antalet fångade fiskar kan vi låta Y_n vara Eulerapproximationen av antalet fångade fiskar upp till tiden t_n. Eulerapproximationen kan skrivas som systemet

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n + \Delta t y_n(5 - \alpha - y_n) \\ Y_{n+1} &= Y_n + \Delta t \alpha y_n \end{aligned}$$

som är Eulerapproximationen av systemet

$$\begin{aligned} y'(t) &= y(t)\big(5 - \alpha y(t)\big) \\ Y'(t) &= \alpha y(t) \end{aligned}$$

med begynnelsevillkoret $(y(0), Y(0)) = (2, 0)$. Noggrannhetsordningen av denna approximation är $\mathcal{O}(\Delta t)$, så felet i Y har också denna ordning (detta gäller även om integrationen skulle göras med trapetsmetoden).

2a. (9p) Formulera en finit differensmetod för att approximera temperaturen $u(x)$, i vinkelpositionen x i en ring, som uppfyller

$$e^{-\sin^2 x} = \frac{d^2}{dx^2} u(x)\,, \quad 0 < x < 2\pi,$$

och $u(x + 2\pi) = u(x)$ för alla $x \in [0, 2\pi]$ samt $\int_0^{2\pi} u(x)\, dx = 1\,.$

2b. (8p) Skriv ett matlabprogram för att bestämma approximationen i uppgift 2a.

2a. Låt $x_n = n\Delta x, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N$ vara en indelning av $[0, 2\pi]$ där $\Delta x = 2\pi/N$ och approximera med differenskvoten

$$\frac{d^2}{dx^2} u(x_n) \simeq \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{\Delta x^2}\,.$$

Differensapproximationen ger för $f(x_n) := e^{-\sin(x_n)}$

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{\Delta x^2} &= f(x_n), \quad n = 2, 3, \ldots, N, \\ u_1 &= u_{N+1}, \\ (u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_N)\Delta x &= 1. \end{aligned}$$

Ekvationerna i matrisform lyder $A\mathbf{u} = \mathbf{f}$ där

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ u_N \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 1/\Delta x \\ f(x_2)\Delta x^2 \\ \\ f(x_3)\Delta x^2 \\ . \\ . \\ f(x_N)\Delta x^2 \end{bmatrix}$$

och

$$A_{nm} = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 1, & n \neq 1, |n - m| = 1 \\ -2, & n = m \neq 1 \\ 0, & 1 < n < N - 1, |m - n| > 1\,, \\ 0, & n = N, 1 < m < N - 1, \\ 1, & n = N, m = 1. \end{cases}$$

2b. Ett exempel på matlabprogram är

```
clear all
close all
N=100;
dx=2*pi/N;
x=zeros(N,1);
for n=1:N
    x(n)=n*dx;       % indelning
end
u=zeros(N,1);
A=zeros(N,N);
F=zeros(N,1);

f=@(x) exp(-sin(x));

for n=2:N-1
    A(n,n)=-2;
    A(n,n+1)= 1;
    A(n,n-1)= 1;

    F(n)=f(x(n))*dx*dx;
end
F(1)=1/dx;
F(N)=f(x(N))*dx*dx;
for m=1:N
    A(1,m)=1;
end
A(N,N)=-2;
A(N,N-1)=1;
A(N,1)=1;

u=A\F;

plot(x,u)
```

3.(15p) Betrakta problemet $f(t) = u'(t)$, $t \in [0,1]$, och en approximation F av f med differenskvoterna

$$F(t_n) = \frac{U(t_{n+1}) - U(t_n)}{\Delta t}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N-1,$$

givet funktionsvärdena $U(t_n)$ och indelningen $t_n = n\Delta t$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N$, där $N = 1/\Delta t$. Antag att maximumnormen av störningen w av indata, $U = u + w$, är $\|w\|_\infty \approx 10^{-2}$. Maximumnormen defineras av $\|w\|_\infty = \max_{t\in[0,1]} |w(t)|$. Vad är ett lämpligt val av Δt för att approximera f med F, om vi vet att $\|u''\|_\infty$ är ungefär 2? Vad blir felet i approximationen av f?

3. Vi har feluppskattningen

$$\begin{aligned}|F(t_n) - f(t_n)| &= |\frac{u(t_n + \Delta t) - u(t_n) + w(t_n + \Delta t) - w(t_n)}{\Delta t} - u'(t_n)| \\ &= |\frac{u(t_n + \Delta t) - u(t_n) - u'(t_n)\Delta t}{\Delta t} + \frac{w(t_n + \Delta t) - w(t_n)}{\Delta t}| \\ &\leq |\frac{u(t_n + \Delta t) - u(t_n) - u'(t_n)\Delta t}{\Delta t}| + |\frac{w(t_n + \Delta t) - w(t_n)}{\Delta t}|\,.\end{aligned}$$

Taylors formel ger

$$|\frac{u(t_n + \Delta t) - u(t_n) - u'(t_n)\Delta t}{\Delta t}| \leq \|u''\|_\infty \Delta t/2,$$

medan

$$|\frac{w(t_n + \Delta t) - w(t_n)}{\Delta t}| \leq \frac{2\|w\|_\infty}{\Delta t}.$$

Ett lämpligt val av Δt blir då det Δt som minimerar

$$\|u''\|_\infty \Delta t/2 + \frac{2\|w\|_\infty}{\Delta t}$$

vilket uppfyller

$$\frac{\|u''\|_\infty}{2} - 2\frac{\|w\|_\infty}{\Delta t^2} = 0,$$

med lösningen $\Delta t = \sqrt{4\|w\|_\infty/\|u''\|_\infty} \approx 0.14$.

Alternativ uppgift 3. (15p) Formulera och bevisa en sats om konvergens för Newtons metod.