Laboration 1: Optimalt sparande

Avsikten med denna laboration är att:

- snabbt komma igång med träning på matlabprogrammering (uttnyttja gärna alla schemalagda laborationstillfällen),
- lösa ett optimeringsproblem med en differentialekvation som bivillkor,
- repetera och hantera metoden med Lagrangefunktioner för att lösa optimeringsproblem med bivillkor
- studera ett exempel när en differentialekvation används för att bestämma koefficienter i ekvationen, d.v.s. lösa ett inverst problem,
- öva på numerisk approximation, ekvationslösning, optimering och Matlabprogrammering.

Frank P. Ramsey skrev 1928 uppsatsen ”A Mathematical Theory of Saving” [The Economic Journal, vol 38 (1928), 543-559] där han besvarar frågan hur mycket av inkomsten som en nation ska spara, genom att lösa följande optimeringsproblem. Betrakta en ekonomi med kapitalet $X(t)$ och konsumtionen $\alpha(t)$, vid tiden t, och anta att produktionen ges av $f(X(t))$, för en given funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, så att

$$\frac{d}{dt}X(t) = f(X(t)) - \alpha(t)\,, \tag{1}$$

vilket betyder att produktionen $f(X(t))$ är uppdelad i konsumtion $\alpha(t)$ och investering $dX(t)/dt$. Anta att $X(0) = x_0$ är ett givet begynnelsekapital. Frågan är hur mycket nationen ska spara. Hög konsumtion idag är attraktivt men leder via (1) till låg investering. Anta att samhället värderar konsumtionen med en given nyttofunktion $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som är strängt växande, strängt konkav och begränsad uppåt, d.v.s. $\lim_{\alpha\to\infty} U(\alpha) = U_\infty \in \mathbb{R}$ och för alla $\alpha \in \mathbb{R}$ gäller $U'(\alpha) > 0$ och $U''(\alpha) < 0$. Detta antagande betyder att människor med hög konsumtion värderar en given ökad konsumtion lägre än människor med låg konsumtion. Ramsey bestämmer den konsumtionsfunktion som funktion av X, $\tilde\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $\alpha(t) = \tilde\alpha(X(t))$, som minimerar onyttan $\tilde U := U_\infty - U$ över tiden

$$\int_0^\infty \tilde U\big(\alpha(t)\big)dt \tag{2}$$

där X och α löser (1) med givet startkapital $X(0) = x_0$. Variabelbytet $t \to X(t)$ ger $dt = dX/\big(f(X) - \tilde\alpha(X)\big)$ och onyttan

$$\int_0^\infty \tilde U\big(\alpha(t)\big)dt = \int_{x_0}^\infty \frac{\tilde U\big(\tilde\alpha(X)\big)}{f(X) - \tilde\alpha(X)}dX.$$

Man kan minimera detta uttryck med avseende på funktioner $\tilde\alpha$ men det är enklare att minimera en diskret approximation

$$\min_{\tilde\alpha\in\mathbb{R}^N} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde U(\tilde\alpha_n)}{f(X_n) - \tilde\alpha_n}\Delta X \tag{3}$$

med avseende på värden $\tilde{\alpha}_n$, som approximerar $\tilde{\alpha}(X_n)$, där $X_n = n\Delta X$ för $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Del A 1. Motivera varför en minimipunkt $\tilde{\alpha} = (\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \ldots)$ till (3) satisfierar

$$0 = \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_n} \frac{\tilde{U}(\tilde{\alpha}_n)}{f(X_n) - \tilde{\alpha}_n}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

och visa att det leder till

$$f(X_n) - \tilde{\alpha}_n = -\frac{\tilde{U}(\tilde{\alpha}_n)}{\tilde{U}'(\tilde{\alpha}_n)}, \tag{4}$$

vilket är Ramseys regel för sparande ”the rate of saving multiplied by the marginal utility of money should be equal to the amount by which the total net enjoyment falls short of the possible rate of enjoyment”.

Del A 2. Låt $X'(t) = f\big(X(t)\big) - \tilde{\alpha}\big(X(t)\big)$ med produktionsfunktionen $f(X) = X + X^2/5$, $t \in [0, 1]$ och begynnelsedata $X(0) = 1$. Skriv ett matlabprogram som löser denna differentialekvation med Eulers metod

$$\frac{X_{n+1} - X_n}{\Delta t} = f(X_n) - \tilde{\alpha}(X_n) \quad n = 0, 1, 2, \ldots N - 1,$$

där X_n är en approximation av $X(n\Delta t)$ med tidsteget $\Delta t = 1/N$, för olika val av konsumtionsfunktionen $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Visa figurer av Eulerapproximation av funktionen $X : [0, 1] \to \mathbb{R}$ för $\tilde{\alpha}(X) = f(X)/2$, $\tilde{\alpha}(X) = 1/2$ och $\tilde{\alpha}(X) = 0$ med lämpligt val av tidsteg Δt. Vad blir värdet av nyttan $\int_0^1 U(\tilde{\alpha}(X(t))dt$ om nyttofunktionen är $U(\tilde{\alpha}) = -1/\tilde{\alpha}$? I uppgift A6 formulerar vi en metod att bestämma den optimal konsumtionsfunktionen för en given nyttofunktion med ändlig tidshorisont.

Del A 3. Den implicita Eulermetoden för problemet i uppgift A2 lyder

$$\frac{X_{n+1} - X_n}{\Delta t} = f(X_{n+1}) - \tilde{\alpha}(X_{n+1}) \quad n = 0, 1, 2, \ldots N - 1.$$

Skriv ett matlabprogram för implicita Eulermetoden där $f(X) = X + X^2/5$ och $\tilde{\alpha}(X) = 2f(X)$ med $X_0 = 1$ baserat på

a) fixpunktiterationer (utan att använda f'),

b) Newtoniterationer (som är en slags fixpunktiteration).

Betrakta modellen

$$\begin{aligned} X'(t) &= -\lambda X(t), \\ X(0) &= 1, \end{aligned}$$

där λ är en positiv konstant. Visa att

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= (1 - \lambda\Delta t)X_n \text{ för explicita Eulermetoden,} \\ X_{n+1} &= X_n/(1 + \lambda\Delta t) \text{ för implicita Eulermetoden,} \\ X\big((n + 1)\Delta t\big) &= e^{-\lambda\Delta t} X(n\Delta t) \text{ för den exakta lösningen.} \end{aligned}$$

Vi har $\lim_{t\to\infty} X(t) = 0$. Vad gäller för explicita och implicita Eulermetoderna när $n \to \infty$ och Δt är fixerad? Implicita Eulermetoden kräver något mer arbete per tidsteg (och att implementera) än explicita Eulermetoden. Ungefär hur många iterationer per tidsteg krävs. Har den implicita metoden någon fördel jämfört med den explicita?

Del A 4. Skriv ett Matlabprogram för minstakvadratmetoden och bestäm den produktionsfunktion $f(X) = aX + bX^2$ som bäst approximerar följande produktionsvärden $f(0) = 0, f(0.5) = 0.52, f(1) = 1.09, f(1.5) = 1.75, f(2) = 2.45, f(2.99) = 3.5, f(3) = 4.0$

Skriv också ett Matlabprogram för polynomapproximation och jämför minstakvadratmetoden med att interpolera ett polynom som antar dessa värden. Uppskatta felen i båda metoder. Vad är din slutsats om val av approximationsmetod?

Del A 5. Ramsey ger följande skattning av nyttofunktionen: $U(150) = 2, U(200) = 3, U(300) = 4, U(500) = 5, U(1000) = 6, U(2000) = 7, U_\infty = 8$, där 150 är familjeårskonsumtionen i pund. Bestäm en approximation av U som har positiv derivata, t.ex. genom att ansätta $1/U(\tilde{\alpha}) = 1/8 + a/\tilde{\alpha}$ eller $U = 8 + ae^{b\tilde{\alpha}}$ och använda minstakvadratmetoden. Vilken ansats är bäst? Har du bättre alternativ? Vad leder polynomapproximation av U till?

Bestäm först produktionen $f(X)$ som funktion[1] konsumtionen α med hjälp av (4) och din skattning av U. Bestäm sedan konsumtionen som funktion av kapitalet, $\tilde{\alpha}(X)$, med hjälp av (4) och dina skattningar av f och U. Vilken metod är lämplig?

Sparande med ändlig horisont

Ett relaterat sparproblem med ändlig tidshorisont T kan formuleras som en model för ett eget företag med kapital X, produktion $f(X)$, löneuttag α och möjlig försäljning vid T. För ett givet tidsintervall $[0, T]$ är problemet att bestämma löneuttaget (d.v.s. konsumtionen) $\alpha : [0, T] \to \mathbb{R}$ så att nyttan

$$\int_0^T U\big(\alpha(t)\big)dt + g\big(X(T)\big) \tag{5}$$

maximimeras, där X och α löser (1) och $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ är en given nyttofunktion för sparat kapital vid tiden T, t.ex. från försäljning, som uppfyller $g'(X) > 0$ och $g''(X) < 0$.

Del A 6. Vi ska lösa optimeringsproblemet (5) numeriskt med hjälp av Eulers metod

$$X_{n+1} = X_n + \Delta t\big(f(X_n) - \alpha_n\big), \quad n = 0, \ldots, N-1, \tag{6}$$

där (X_n, α_n) approximerar $\big(X(n\Delta t), \alpha(n\Delta t)\big)$ med tidsteget $\Delta t = 1/N$.

[1] Frivillig fråga: ger Ramseys nyttofunktion den andel sparande som görs idag?

Målet är att maximera nyttan

$$\max_{\alpha\in\mathbb{R}^N} \big(\sum_{n=0}^{N-1} U(\alpha_n)\Delta t + g(X_N)\big)$$

med bivillkoret (6). Lagranges metod är användbar för att studera maximering med bivillkor och ger en formulering av optimering med bivillkor som liknar villkoret att gradienten blir noll i optimering utan bivillkor. Repetera avsnittet om Lagranges metod från kursen analys i flera variabler. Lagrangefunktionen, som beror på X_n, α_n och Langrangemultiplikatorerna $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $n = 0, \ldots, N$, definieras av

$$L(X,\alpha,\lambda) := \sum_{n=0}^{N-1} U(\alpha_n)\Delta t + g(X_N) - \sum_{n=0}^{N-1} \lambda_{n+1}\Big(X_{n+1} - X_n - \Delta t\big(f(X_n) - \alpha_n\big)\Big)$$

där $X = (X_0, \ldots, N_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$, $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$, $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$. Visa att Lagrangefunktionen satisfierar

$$\begin{aligned}
&-\frac{\partial L}{\partial \lambda_m}(X,\alpha,\lambda) = X_m - X_{m-1} - \Delta t\big(f(X_{m-1}) - \alpha_{m-1}\big), \quad m = 1, \ldots, N,\\
&\frac{\partial L}{\partial \alpha_n}(X,\alpha,\lambda) = \big(U'(\alpha_n) - \lambda_{n+1}\big)\Delta t, \quad n = 0, \ldots, N-1,\\
&\frac{\partial L}{\partial X_n}(X,\alpha,\lambda) = -\lambda_n + \lambda_{n+1} + \Delta t f'(X_n)\lambda_{n+1}, \quad n = 0, \ldots, N-1, \quad \frac{\partial L}{\partial X_N}(X,\alpha,\lambda) = g'(X_N) - \lambda_N\,.
\end{aligned}$$

Lagranges metod visar att i en punkt (X^*, α^*) där nyttan, $\sum_{n=0}^{N-1} U(\alpha_n)\Delta t + g(X_N)$, är maximal med (6) som bivillkor, finns $\lambda = \lambda^* \in \mathbb{R}^{N+1}$ som uppfyller

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \lambda_m}(X^*,\alpha^*,\lambda^*) &= 0, \quad m = 1, \ldots N,\\
\frac{\partial L}{\partial \alpha_n}(X^*,\alpha^*,\lambda^*) &= 0, \quad n = 0, \ldots N-1,\\
\frac{\partial L}{\partial X_n}(X^*,\alpha^*,\lambda^*) &= 0, \quad n = 0, \ldots N-1,
\end{aligned}$$

d.v.s. gradienten av Lagrangefunktionen är noll i punkten $(X^*, \alpha^*, \lambda^*)$. Vi får då ekvationssystemet

$$\begin{aligned}
\lambda_{n+1} &= U'(\alpha_n), \quad n = 0, \ldots N-1,\\
\lambda_n &= \lambda_{n+1} + \Delta t f'(X_n)\lambda_{n+1}, \quad n = 0, \ldots N-1, \quad \lambda_N = g'(X_N)\\
X_{n+1} &= X_n + \Delta t\big(f(X_n) - \alpha_n\big), \quad n = 0, \ldots, N-1, \quad X_0 = x_0.
\end{aligned}$$

Låt nyttofunktionen vara $U(\alpha) = -2\alpha^{-1/2}$. Visa att detta ger $\alpha_n = (\lambda_{n+1})^{-2/3}$ för $n = 0, \ldots, N-1$.

Det ickelinjära systemet

$$\begin{aligned}
\lambda_n &= \lambda_{n+1} + \Delta t f'(X_n)\lambda_{n+1}, \quad n = 0, \dots N-1, \quad \lambda_N = g'(X_N) \\
X_{n+1} &= X_n + \Delta t\big(f(X_n) - \frac{1}{\lambda_{n+1}^{2/3}}\big), \quad n = 0, \dots, N-1, \quad X_0 = x_0\,,
\end{aligned} \tag{7}$$

har begynnelsevärdet $X_0 = x_0$ för kapitalet och slutvärdet $\lambda_N = g'(X_N)$ för Lagrangemultiplikatorn, vilket betyder att systemet inte är ett begynnelsevärdesproblem där det räcker att stega fram värden från begynnelsedata. Istället behövs iterationer för att lösa systemet, som för ickelinjära randvärdesproblem. Systemet kan i vissa fall lösas med iterationerna

$$\begin{aligned}
X_n[0] &= x_0, \quad n = 0, \dots, N, \\
\lambda_n[i] &= \lambda_{n+1}[i] + \Delta t f'(X_n[i])\lambda_{n+1}[i], \quad n = 0, \dots N-1, \quad \lambda_N[i] = g'(X_N[i]) \\
X_{n+1}[i+1] &= X_n[i+1] + \Delta t\big(f(X_n[i+1]) - \frac{1}{\lambda_{n+1}^{2/3}[i]}\big), \quad n = 0, \dots, N-1, \quad X_0[i+1] = x_0\,,
\end{aligned}$$

för $i = 0, 1, 2, \dots,$. Skriv ett Matlabprogram som löser systemet (7).

Exempel på programidé (egna andra lösningar får gärna användas):

- bilda en vektor vars $N+1$ komponenter lagrar kapitalet X vid tiderna $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, N\Delta t$,
- bilda en till vektor med $N+1$ komponenter för att lagra uppdatering av kapitalet och
- bilda en vektor med $N+1$ komponenter för att lagra Lagrangemultiplikatorvärdena vid tidpunkterna $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, N\Delta t$.
- Ge vektorn med kapital lämplig startgissning för alla tider.
- Låt ditt program ha en yttre slinga för att hantera iterationerna (indicerade med $[i]$ ovan) och två inre slingor (indicerade med n ovan).
- Den första inre slingan stegar bakåt i tiden och ger Lagrangemultiplikatorn värden med start $\lambda_N = g'(X_N)$ vid $t = 1$ och slut λ_0 vid $t = 0$, med hjälp av andra raden i ekvationen ovan (dvs första raden i (7) som använder värden på kapitalet).
- Den andra inre slingan stegar sedan uppdaterade kapitalvärdet framåt i tiden från $X_0 = 1$ till sista värdet X_N, med hjälp av tredje raden i ekvationen ovan (som använder Lagrangemultiplikatorn).
- Efter att båda inre slingor gjorts bestäms normen av skillnaden av kapital och uppdaterat kapital, sedan uppdateras kapitalet och slutligen testas om kapitalvärdet ändrats tillräckligt lite för att avsluta den yttre slingan.

Studera iterationernas konvergens/divergens och formulera ett lämpligt stoppvillkor. Vad blir lösningen för $g(X) = 2\sqrt{X}, T = 1, x_0 = 1$ och alternativen $f(X) = X, f(X) = X + X^2/4$ och f från uppgift 4.

Del B 7. Beskriv de felkällor din lösning av optimalt sparande har och jämför felens storlek. Är stora konditionstal inblandade?

Del B 8. Systemet (7) kan lösas med Newtons metod. Skriv ett Matlabprogram som löser (7) med Newtons metod. Konvergerar Newtonmetoden för $x_0 = 1, \Delta t = 1/100, T = 1, g(X) = 2X^{1/2}$ och $f(X) = X + X^2/4$?

Del B 9. Systemet av differentialekvationer

$$\begin{aligned} X'(t) &= f\big(X(t)\big) - \frac{1}{(\lambda(t))^{1/2}}, \quad X(0) = x_0 \\ \lambda'(t) &= -f'\big(X(t)\big)\lambda(t), \quad \lambda(T) = g\big(X(T)\big) \end{aligned} \tag{8}$$

är ett Hamiltonskt system, d.v.s. om $X(t)$ och $\lambda(t)$ är vektorer i $\mathbb{R}^d$ ($d = 1$ i detta fall) kan det skrivas

$$\begin{aligned} X'(t) &= \nabla_\lambda H\big(X(t), \lambda(t)\big) \\ \lambda'(t) &= -\nabla_X H\big(X(t), \lambda(t)\big) \end{aligned}$$

för en funktion $H : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Bestäm H för (8).

Hamiltonska system karakteriseras av att Hamiltonianen längs en bana är konstant, d.v.s.

$$\frac{d}{dt} H\big(X(t), \lambda(t)\big) = 0.$$

Visa detta.

Andra exempel på Hamiltonska system är dynamiska system som bevarar energi $H(X, \lambda)$ om $X \in \mathbb{R}^d$ är koordinater för partiklars position och $\lambda \in \mathbb{R}^d$ är dess hastigheter.