KTH Matematik

Namn: ....

Personnummer:.. **Program och årskurs:** ....

Tentamen del 1
Numeriska metoder SF1545
9.00-12.00 16/1 2015

Gränsen för betyg E är 14 poäng (inklusive bonuspoäng).
Om kontrollskrivningen 16/12 2014 är godkänd behöver del 1 av tentamen ej göras.

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).
Skriv svaren på detta papper.

Bonus. Ange dina bonuspoäng från kursomgången HT14 här:

1. (2p) Fixpunktsiterationerna

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{1}$$

med startpunkten $x_0 = 1$ konvergerar mot

☐ $1/2$	☐ $\sqrt{2}$
☐ $1/3$	☒ 2
☐ $1/4$	☐ 3
☐ $1/\sqrt{2}$	☐ iterationerna konvergerar ej

2. (2p) Den asymptotiska konvergensfarten för fixpunktsiterationen (1) är

- ☐ linjär, med felreduktionsfaktorn $1/2$
- ☐ linjär, med felreduktionsfaktorn $-1/2$
- ☒ linjär, med felreduktionsfaktorn $1/4$
- ☐ linjär, med felreduktionsfaktorn $1/3$
- ☐ linjär, med felreduktionsfaktorn $1/\sqrt{2}$
- ☐ linjär, med felreduktionsfaktorn $1/\sqrt{3}$
- ☐ kvadratisk
- ☐ metoden konvergerar ej

3. (3p) Modellen $y = ax + b$ anpassad i minstakvadratmening till mätvärdena

x	1	2	3
y	0	2	4

ger b lika med

- ☒ -2
- ☐ -1.7
- ☐ -1.3
- ☐ -1
- ☐ -0.7
- ☐ -0.3
- ☐ 2
- ☐ något annat

4. (3p) En iteration med Newtons metod för att lösa systemet

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 1 &= 0, \\ x^2 - y &= 0, \end{aligned}$$

med startgissningen $x = 1/2$ och $y = 1/2$ ger

- ☐ $(x, y) = (1/2, 3/8)$
- ☐ $(x, y) = (1/4, 3/8)$
- ☐ $(x, y) = (-1/2, 3/8)$
- ☐ $(x, y) = (1/2, -3/8)$
- ☒ $(x, y) = (7/8, 5/8)$
- ☐ $(x, y) = (7/8, 3/8)$
- ☐ $(x, y) = (1/2, 1)$
- ☐ något annat

5. (2p) Trapetsmetoden med två lika stora intervall ger integralen $\int_{-1}^{1} x^2\,dx$ approximationen

- ☐ $-1/2$
- ☐ 0
- ☐ $1/2$
- ☒ 1
- ☐ $3/2$
- ☐ 2
- ☐ $5/2$
- ☐ något annat

6. (1p) Antag att matrisen A med dimension $n \times n$ har normen

$$\|A\|_\infty = \max_{y\in\mathbb{R}^n, y\neq 0} \frac{\|Ay\|_\infty}{\|y\|_\infty} = 10^4$$

där $\|y\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |y_i|$. Dessutom gäller $\|A^{-1}\|_\infty = 10^3$. Om $x \in \mathbb{R}^n$ löser det linjära ekvationssystemet $Ax = b$ och $x + \Delta x$ löser samma system med en störning i högerledet, $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$, där $\|\Delta b\|_\infty/\|b\|_\infty = 10^{-16}$, hur stort kan det relativa felet i lösningen, $\|\Delta x\|_\infty/\|x\|_\infty$, maximalt vara?

- ☐ 10^{-7}
- ☐ 10^{-8}
- ☒ 10^{-9}
- ☐ 10^{-10}
- ☐ 10^{-11}
- ☐ 10^{-12}
- ☐ 10^{-16}
- ☐ något annat

7. (1p) En vektor $x \in \mathbb{R}^3$ har norm $\|x\|_\infty = 2$. Om

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & -9 \end{pmatrix}$$

hur stort kan då $\|Ax\|_\infty$ maximalt vara?

- ☐ 9
- ☐ 10
- ☐ 12
- ☐ 18
- ☐ 24
- ☐ 36
- ☒ 48
- ☐ något annat

8. (2p) Med hjälp av tabellen

t	1.1	1.2	1.3	1.4
f(t)	3.0042	3.3201	3.6693	4.0552

kan derivatan $f'(1.2)$ approximeras. Välj det alternativ nedan som ger bäst approximation.

- [ ] 0.21
- [ ] 0.45
- [ ] 1.3
- [x] 3.3
- [ ] 5.6
- [ ] 7.1
- [ ] 10.4

9. (2p) Funktionen $y(t)$ löser begynnelsevärdesproblemet

$$y''(t) = \frac{1}{1+y(t)}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

Ett steg med Eulermetoden ger $y(0.1)$ det approximativa värdet

- [ ] 0.8
- [ ] 0.9
- [ ] 1.0
- [ ] 1.05
- [x] 1.1
- [ ] 1.2
- [ ] 1.25
- [ ] något annat

10. (2p) Matrisen A har egenvärdena $1, 2, 3$ och 4. Potensmetoden (engelska: Power Method)

```
function [lam,u]=powerit(A,x,k)
for j=1:k
     u=x/norm(x);
     x=A*u;
     lam=u'*x;
end
u=x/norm(x);
end
```

ger för nästan alla startvärden en approximation av ett av egenvärdena (och tillhörande egenvektor). Vilket?

- [x] 4
- [ ] 2
- [ ] 1
- [ ] 3