Kontrollskrivning
Numeriska metoder SF1545
08.00-10.00 16/12 2015

Gränsen för betyg E är 14 poäng (inklusive bonuspoäng).

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).
Skriv svaren på detta papper.
Bonus. Ange dina bonuspoäng från kursomgången HT15 här:

1. (2p) Matlabkoden

```
N=10;
x=2;
for n=1:N
    x=3/(2+x);
end
display(x)
```

ger en utskrift av x som konvergerar mot 1 när $N \to \infty$ och felets storlek i iterationerna reduceras med en faktor som är närmast

- [ ] $\frac{1}{2}$
- [ ] ∞
- [ ] 3
- [x] $\frac{1}{3}$
- [ ] 2
- [ ] $\frac{2}{5}$
- [ ] $\frac{1}{5}$
- [ ] $\frac{2}{3}$
- [ ] 0

asypmtotiskt när $N \to \infty$.

2. (3p) Newtons metod med startgissningen $x = 2$ för att lösa ekvationen $f(x) = 0$, där

$$f(x) = x - \frac{3}{2+x},$$

ger med en iteration approximationen

- [x] $\frac{18}{19}$
- [ ] $\frac{15}{16}$
- [ ] något annat
- [ ] $\frac{17}{18}$
- [ ] $\frac{17}{18}$
- [ ] $\frac{16}{15}$

3. (2p) Anta att $A = \begin{bmatrix} 10^{-4} & 3 \\ 3 & 10^5 \end{bmatrix}$. Låt $x \in \mathbb{R}^2$ lösa det linjära ekvationssystemet $Ax = b$ och $x + \Delta x$ lösa systemet med en störning i högerledet, $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$, där $\|\Delta b\|_\infty / \|b\|_\infty = 10^{-11}$ och $b = (b_1, b_2)$ med $\|b\|_\infty = \max(|b_1|, |b_2|)$. Det maximala relativa felet, $\|\Delta x\|_\infty / \|x\|_\infty$, i lösningen är då närmast

- [ ] 1
- [ ] 10^{-4}
- [ ] 10^{-11}
- [x] 10^{-1}
- [ ] 10^{-5}
- [ ] 10
- [ ] 10^{-2}
- [ ] 10^{-6}
- [ ] 10^{-3}

4. (3p) Vid minstakvadratanpassning av modellen $U(\alpha) = a + b/\alpha$ till datapunkterna (α_i, U_i), $i = 1, 2, 3$ enligt tabellen,

α_i	$1/3$	$1/2$	1
U_i	4	3	1

bestäms parametrarna a och b av

- [x] $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 19 \end{bmatrix}$
- [ ] $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 20 \end{bmatrix}$
- [ ] $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$
- [ ] $\begin{bmatrix} 3 & 11/6 \\ 11/6 & 44/36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 18/6 \end{bmatrix}$
- [ ] $\begin{bmatrix} 3 & 11/6 \\ 11/6 & 44/36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 18/6 \end{bmatrix}$
- [ ] något annat

5. (2p) Anta att $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Potensmetoden (engelska: Power Method)

```
function [lam,u]=powerit(A,x,k)
for j=1:k
     u=x/norm(x);
     x=A*u;
     lam=u'*x;
end
u=x/norm(x);
end
```

ger för nästan alla startvärden en approximation av ett av egenvärdena (och tillhörande egenvektor). Vilket?

- [ ] $1/2$
- [ ] 2
- [x] 3
- [ ] -1
- [ ] -2
- [ ] -4

6. (2p) Trapetsmetoden med tre lika stora intervall ger integralen $\int_1^4 \frac{1}{x}\,\mathrm{dx}$ approximationen

- [ ] $25/24$
- [ ] $30/24$
- [ ] $32/24$
- [x] $35/24$
- [ ] $38/24$
- [ ] $41/24$
- [ ] $45/24$
- [ ] något annat

7. (2p) Monte Carlometoden $\sum_{i=1}^{N} x_i/N$ har väntevärdet

- [x] $\frac{1}{2}$
- [ ] $\frac{1}{3}$
- [ ] 1
- [ ] 3
- [ ] 2
- [ ] något annat

när alla $x_i,\ i = 1, 2, 3, \ldots, N$, är oberoende och likformigt fördelade stokastiska variabler på intervallet $[0, 1]$.

8. (2p) Approximation av $y(0.2)$, där

$$y'(t) - \big(y(t)\big)^2 + 5t = 0\,,\ t > 0,$$
$$y(0) = 1\,,$$

med hjälp av explicita Eulermetoden och två tidsteg, med steglängd $\Delta t = 0.1$, ger ett värde som är närmast

- [ ] 1.15
- [ ] 1.18
- [ ] 1.10
- [ ] 1.16
- [ ] 1.19
- [ ] 1.12
- [x] 1.17
- [ ] 1.20
- [ ] 1.13

9. (2p) Finita differensmetoden

$$\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{(\Delta x)^2} - 2u_n = 1\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, N$$

med $\Delta x = 1/(N+1)$, där u_n är en approximation av $u\big(n/(N+1)\big),\ n = 0, 1, \ldots, N+1$, och $u_0 = 1$ och $u_{N+1} = 0$, ger en approximation av randvärdesproblemet

- [ ] $-u''(x) = 1+2u(x),\ u(0) = 1, u(1) = 0$
- [x] $u''(x) = 1 + 2u(x),\ u(0) = 1, u(1) = 0$
- [ ] $u''(x) = 2u(x),\ u(0) = 1, u(1) = 0$
- [ ] $-u''(x) = 1+2u(x),\ u(0) = 0, u(1) = 0$
- [ ] $u''(x) = 1 + 2u(x),\ u(0) = 0, u(1) = 1$
- [ ] $u''(x) = 2u(x),\ u(0) = 1, u(1) = 0$
- [ ] något annat