SF1545 LABORATION 2 (2015): INTEGRATION, MONTE-CARLO OCH BLACK-SCHOLES EKVATION FÖR OPTIONER

Avsikten med denna laboration är att:

- beräkna integraler med två olika metoder: Monte Carlo och kvadratur,
- se förväntade värden av slumpvandring som differensmetoder,
- studera ett exempel på integrationsmetod i hög dimension,
- ge exempel på differentialekvationer med stokastiska data,
- öva på numerisk integration, derivering, differentialekvationer, Monte Carlo metoden, och Matlabprogrammering.

Laborationen handlar om deterministiska och stokastiska integrationsmetoder tillämpat på optioner. En europeisk säljoption är ett kontrakt som ger möjligheten att sälja en aktie för ett fixt pris K vid en fix tid T i framtiden. Värdet f av optionen är en funktion av nuvarande aktiepris s och nuvarande tid t. Black-Scholes ekvation

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(s,t)}{\partial t} + rs\frac{\partial f(s,t)}{\partial s} + \frac{\sigma^2 s^2}{2}\frac{\partial^2 f(s,t)}{\partial s^2} &= rf(s,t) \qquad \text{för } t < T \text{ och } s \in \mathbf{R} \\ f(s,T) &= \max(K - s, 0) \end{aligned} \tag{0.1}$$

beskriver hur optionsvärdet beror på räntan $r \in [0,\infty)$ och aktiens volatilitet $\sigma \in [0,\infty)$. Merton och Scholes fick 1997 Riksbankens "Nobelpris" för härledningen av denna ekvation från en precis matematisk beskrivning av en självfinansierad riskfri portfölj utan arbitrage; härledningen bygger på den "hedging" som utfärdaren (banken) genomför för att hantera optionen. Kolla gärna vad självfinansierad riskfri portfölj utan arbitrage betyder.

Ett alternativt sätt att bestämma optionspriset (i fallet $r = 0$) är att räkna ut det betingande förväntade värdet $f(s,t) = \mathbb{E}[\max(K - S_T, 0) \mid S_t = s]$ där S_τ löser den stokastiska differentialekvationen

$$dS_\tau = \sigma S_\tau dW_\tau \tag{0.2}$$

som kan tolkas som gränsvärdet av Eulermetoden

$$\bar{S}\big((n+1)\Delta\tau\big) = \bar{S}(n\Delta\tau) + \sigma\bar{S}(n\Delta\tau)\Delta W_n$$

där $(\Delta W_0, \ldots, \Delta W_n, \ldots)$ är oberoende stokastiska variabler som alla är normalfördelade med väntevärdet noll och variansen Δt. I hög dimension, d.v.s. om $S(t) \in \mathbf{R}^d$ för $d \gg 1$, är det ofta mer beräkningseffektivt att använda Monte Carlo alternativet.

Här följer en kort motivering varför väntevärdet av den stokastiska lösningen $\mathbb{E}[\max(S_T - K, 0) \mid S_t = s]$ löser den deterministiska Black-Scholes ekvation. Låt oss betrakta slumpvandringsapproximationen

$$X_{n+1} - X_n = \alpha\Delta\tilde{W}_n \tag{0.3}$$

där $(\Delta\tilde{W}_0, \ldots, \Delta\tilde{W}_n, \ldots)$ är oberoende stokastiska variabler och $\Delta\tilde{W}_n = \pm\sqrt{\Delta\tau}$ med sannolikheten $1/2$ och $\alpha > 0$ är en konstant. Då uppfyller väntevärdet $\hat{f}^n_m = \mathbb{E}[g(X_N) \mid X_n = m\alpha\sqrt{\Delta\tau}]$ differensekvationen

$$\hat{f}^n_m = \frac{\hat{f}^{n+1}_{m+1} + \hat{f}^{n+1}_{m-1}}{2}$$

eftersom X_n kan gå från $m\alpha\sqrt{\Delta\tau}$ till $(m \pm 1)\alpha\sqrt{\Delta\tau}$ med sannolikhet 1/2 på ett tidsteg. Denna differensekvation kan skrivas

$$\frac{\hat{f}_m^{n+1} - \hat{f}_m^n}{\Delta\tau} + \frac{\alpha^2}{2}\frac{\hat{f}_{m+1}^{n+1} - 2\hat{f}_m^{n+1} + \hat{f}_{m-1}^{n+1}}{(\alpha\sqrt{\Delta\tau})^2} = 0$$

vilket är en finit differensapproximation av

$$\frac{\partial}{\partial t}f(x,t) + \frac{\alpha^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,t) = 0, \quad t < T,\ x \in \mathbf{R}$$
$$f(x,T) = g(x),\ x \in \mathbf{R}.$$

Vi ser att det förväntade värdet av diskreta slumpvandringen uppfyller en differensekvation, som approximerar värmeledningsekvationen. På liknande sätt approximerar den stokastiska differentialekvationen (0.2) Black-Scholes ekvation (0.1) med $r = 0$, vilket kan generaliseras till $r > 0$.

Del A 1. Integration av en funktion $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ kan göras på olika sätt: med hjälp av kvadratur, t.ex. med trapetsmetoden eller med slumptal och Monte Carlometoden. Låt $f : [0,1] \to [0,\infty)$ vara höjden av en kurva. Arean $\int_0^1 f(x)dx$ kan tolkas som den förväntade höjden $\mathbb{E}[f(X)]$ om positionen X är slumpmässig och likformigt fördelad på $[0,1]$.

Skriv ett Matlab program som bestämmer arean $\int_0^1 (1+x)^{-1/2}dx$ med hjälp av slumphöjder. Implementera också trapetsmetoden och jämför de båda metoderna med avseende på beräkningsarbete för givet fel.

Del A 2. Bestäm med hjälp av Monte Carlo metoden priset på en köpoption

$$\mathbb{E}[\max(S_T - K, 0) \mid S_0 = s] \simeq \sum_{n=1}^{N} \frac{\max(S_T[n] - K, 0)}{N}$$

och använd att

$$S_T[n] = e^{-\sigma^2 T/2 + \sigma W_T[n]}s \tag{0.4}$$

där $(W_T[1], \ldots, W_T[N])$ är oberoende och $W_T[n]$ är normalfördelad med väntevärdet noll och variansen T. Välj σ, T och s t.ex. som i uppgift B5.

Vi kan verifiera (0.4): definiera

$$\frac{\Delta\tilde{S}_n}{\tilde{S}_n} := \frac{\tilde{S}_{n+1} - \tilde{S}_n}{\tilde{S}_n} = \sigma\Delta\tilde{W}_n.$$

Taylorutveckling ger

$$\log\tilde{S}_{n+1} - \log\tilde{S}_n = \log\frac{\tilde{S}_{n+1}}{\tilde{S}_n} = \log(1 + \frac{\Delta\tilde{S}_n}{\tilde{S}_n}) = \frac{\Delta\tilde{S}_n}{\tilde{S}_n} - \frac{1}{2}(\frac{\Delta\tilde{S}_n}{\tilde{S}_n})^2 + \ldots = \sigma\Delta\tilde{W}_n - \frac{\sigma^2}{2}\Delta\tau + \mathcal{O}(\Delta\tau^{3/2})$$

och

$$\log\tilde{S}_N - \log\tilde{S}_0 = \sum_{n=0}^{N-1}(\log\tilde{S}_{n+1} - \log\tilde{S}_n) = \sum_{n=0}^{N-1}\Big(\sigma\Delta\tilde{W}_n - \frac{\sigma^2}{2}\Delta\tau + \mathcal{O}(\Delta\tau^{3/2})\Big) = \sigma X(N\Delta t) - \frac{\sigma^2}{2}T + \mathcal{O}(\Delta\tau^{1/2})$$

där $X(N\Delta\tau)$ är slumpvandringsprocessen (0.3) med $\alpha = 1$, som har väntevärdet noll och variansen T och i gränsen när $\Delta\tau$ går mot noll blir den normalfördelad enligt centrala gränsvärdessatsen.

Del A 3. Bestäm med hjälp av Monte Carlo metoden priset på en regnbågs-köp-på-max-option

$$\mathbb{E}\Big[\max\Big(\max\big(S_1(T), S_2(T)\big) - K, 0\Big),\ \Big|\, S_1(0) = s_1, S_2(0) = s_2\Big]$$

och använd att

$$S_i(T) = e^{-\sigma^2 T/2 + \sigma W_i(T)}s_i$$

där $W_1(T)$ och $W_2(T)$ är oberoende och båda är normalfördelad med väntevärdet noll och variansen T. Generalisera exemplet från dimension två till högre dimension och undersök hur beräkningsfelet växer med dimensionen.

Del B 4. Låt $r = 0$. Motivera, t.ex. med hjälp av Taylors formel, varför $\tilde{f}(m,n)$ definerad av

$$\begin{aligned}
&\frac{\tilde{f}(m,n)-\tilde{f}(m,n-1)}{\Delta t}+\frac{\sigma^2 m^2(\Delta s)^2}{2}\frac{\big(\tilde{f}(m+1,n)-2\tilde{f}(m,n)+\tilde{f}(m-1,n)\big)}{(\Delta s)^2}=0 \\
&\tilde{f}(m,N)=\max(K-m\Delta s,0)
\end{aligned} \tag{0.5}$$

approximerar $f(m\Delta s, n\Delta t)$ i Black-Scholes ekvation för heltal m och n där $n \leq N$ och $N\Delta t = T$ med (små) positiva reella tal Δt och Δs.

Del B 5.) Skriv ett Matlabprogram som löser Black-Scholes ekvation (0.1) för $r = 0$ med hjälp av differensmetoden (0.5). Du behöver ange begynnelsedata motsvarande

$$f(s,T) = \max(K-s,0).$$

Du behöver också reducera s till ett ändligt intervall

$$s_1 \leq m\Delta s \leq s_2$$

och bestämma approximativa värden för $f(s_1,t)$ och $f(s_2,t)$ för alla $t \in [0,T]$: motivera varför

$$\begin{aligned}
f(0,t) &= K \\
f(\alpha K,t) &= 0
\end{aligned}$$

kan vara lämpligt för ett stort värde på α. Välj $T = 1$, $\sigma = 0.2$ och $K = 1.x_2x_3$ och bestäm $f(K,0)$, där $x_i \in \{0,1,2,\ldots,9\}$ och $K = 1.x_2x_3$ är decimalutvecklingen relaterad till födelsedagen för någon i gruppen så här: 31:a maj: $x_1x_2x_3x_4 = 0531$. Testa hur Δs, Δt och α ska väljas för att felet ska bli mindre än 1 procent.