1. Antag att temperaturen $u(x)$ i positionen x i en stav modelleras av

$$-u''(x) + xu(x) = 1, \quad 0 < x < 1,$$

med randvillkoren $u(0) = 0$ och $u(1) = 2$.

1a. (5p) Formulera en finit differensmetod för att approximera funktionen u.

1b. (5p) Skriv ett Matlabprogram som utför finit differensmetoden i uppgift 1a.

1c. (5p) Formulera en finit differensmetod för att approximera temperaturen $u(x,t)$, i en stav i positionen x vid tiden t, för motsvarande tidsberoende problem som uppfyller

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + xu(x,t) = 1, \quad 0 < x < 1,\ 0 < t < 3,$$

med randvillkoren

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0, \quad t > 0, \\ u(1,t) &= 2, \quad t > 0 \end{aligned}$$

och begynnelsevillkoret

$$u(x,0) = 0, \quad 0 < x < 1\,.$$

1a. Gör indelningen $x_n = n\Delta x,\ n = 0,1,2,\ldots,N+1$ med steglängden $\Delta x = 1/(N+1)$ och approximationen $u_n \simeq u(x_n)$ och $\frac{u_{n+1}-2u_n+u_{n-1}}{(\Delta x)^2} \simeq u''(x_n)$. Dessa approximationer insatta i ekvationen ger systemet av finita differensekvationer

$$\begin{aligned} -\frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{(\Delta x)^2} + x_n u_n &= 1, \quad n = 1,\ldots,N \\ u_0 &= 0, \\ u_{N+1} &= 2, \end{aligned}$$

Vi har de obekanta $\mathbf{u} = (u_1,\ldots,u_N)^T$ och ekvationerna kan skrivas $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$ med $N \times N$ matrisen A,

$$A_{mn} = \begin{cases} 2 + \Delta x^2 x_n & om\ n = m, \\ -1 & om\ |n-m| = 1, \\ 0 & annars, \end{cases} \qquad n = 1,\ldots N, \quad m = 1,\ldots,N,$$

och högerledet $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^N$, där $b_n = \Delta x^2,\ n = 1,\ldots,N-1,$ och $b_N = \Delta x^2 + 2$.

1b. Ett exempel på Matlabprogram är

```
%Randvardesproblem
N=100;         %antal frihetsgrader
dx=1/(N+1);    %steglangd
b=zeros(N,1);  %hogerled
u=zeros(N,1);  %obekanta
A=zeros(N,N);  %matris
for n=1:N    % bilda A,b
        xn=n*dx;
        b(n) = dx^2;
        if n==N
            b(N)=b(N)+2;
        end
        A(n,n)=2+dx^2*xn;
        if n>1
            A(n,n-1)=-1;
        end
        if n<N
            A(n,n+1)= -1;
        end
end
u=A\b;
x=dx:dx:1-dx;
plot(x,u)
```

1c. Låt $t_n = n\Delta t,\ n = 0,1,2,\ldots,N,$ *vara en indelning i* t*-led och* $x_m = m\Delta x,\ m = 0,1,2,\ldots,M+1,$ *vara en indelning i* x*-led, där* $\Delta t = 3/N$ *och* $\Delta x = 1/(M+1)$*. Använd differensapproximationerna*

$$u_{mn} \simeq u(x_m,t_n),$$
$$\frac{u_{mn+1}-u_{mn}}{\Delta t} \simeq \frac{\partial u(x_m,t_n)}{\partial t},$$
$$\frac{u_{m+1n}-2u_{mn}+u_{m-1n}}{(\Delta x)^2} \simeq \frac{\partial^2 u(x_m,t_n)}{\partial x^2},$$

som insatt i värmeledningsekvationen ger den explicita finit differensmetoden

$$u_{mn+1} = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}u_{m+1n} + (1-2\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} - \Delta t x_m)u_{mn} + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}u_{m-1n} + \Delta t, \quad m = 1,\ldots,M, \quad n = 0,1,2,\ldots,N,$$

med randvillkoren

$$u_{0n} = 0, \quad n = 0,1,\ldots,N$$
$$u_{M+1n} = 2, \quad n = 0,1,\ldots,N$$

och begynnelsevillkoret

$$u_{m0} = 0, \quad m = 1, 2, 3, \ldots M.$$

För att få en stabil metod väljer vi Δt *och* Δx *så att* $1 - 2\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} - \Delta t x_M > 0$.

2a. (5p) Formulera en Monte Carlometod för att approximera integralen $\int_0^1 f(x)dx$, där $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$.

2b. (5p) Skriv ett matlabprogram som utför approximationen i uppgift 2a.

2c. (10p) Integralen $\int_0^1 f(x)dx$, där $0 \le f(x) \le 1$, kan approximeras med Monte Carlometod. Ett alternativ är att använda oberoende likformigt fördelade stokastiska variabler på intervallet $[0,1]$ och approximera den förväntade höjden. Ett annat alternativ är att använda oberoende likformigt fördelade variabler i enhetskvadraten $[0,1] \times [0,1]$ i $\mathbb{R}^2$ enligt följande: låt X_n^1 och X_n^2, $n = 1, \ldots, N$ alla vara oberoende likformigt fördelade stokastiska variabler på $[0,1]$ och bilda $\sum_{n=1}^N Y_n/N$ där

$$Y_n = \begin{cases} 1 & \text{om } X_n^2 \le f(X_n^1) \\ 0 & \text{om } X_n^2 > f(X_n^1). \end{cases}$$

Vilket av de två alternativen ger minst förväntat värde av kvadraten av felet för givet antal slumptal? Motivera ditt svar.

2a. Låt ξ_n, $n = 1, 2, 3, \ldots, N$ *vara oberoende och likformigt fördelade variabler på* $[0,1]$. *Då bildar* $\sum_{n=1}^N \frac{1}{N(1+\xi_n^4)}$ *en Monte Carlometod för approximation av* $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}$.

2b. Ett exempel på Matlabkod är

```
N=100;        % number of samples
I = 0;
for n=1:N
    r= rand;  % uniform [0,1] random variable
    I=I+1/(1+r^4)/N;
end
display(I)
```

2c. Metod 1 leder till $\sum_{n=1}^N f(X_n)/N$ *där* X_n, $n = 1, \ldots, N$ *är oberoende och likformigt fördelade på* $[0,1]$.

Metod 2 lyder: låt X_n^1 *och* X_n^2, $n = 1, \dots, N$ *alla vara oberoende likformigt fördelade på* $[0, 1]$ *och bilda* $\sum_{n=1}^N Y_n/N$ *där*

$$Y_n = \begin{cases} 1 & \text{om } X_n^2 \le f(X_n^1) \\ 0 & \text{om } X_n^2 > f(X_n^1). \end{cases}$$

Det förväntade felet i kvadrat i fall 1 blir med $m = \int_0^1 f(x)dx$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N}\mathbb{E}[\big(f(X_1) - m\big)^2] &= \frac{1}{N}\int_0^1 \big(f(x) - m\big)^2 dx \\
&= \frac{1}{N}\int_0^1 \big((f(x))^2 - 2f(x)m + m^2\big)dx \\
&= \frac{1}{N}\Big(\int_0^1 (f(x))^2 dx - m^2\Big).
\end{aligned}$$

Det förväntade felet i kvadrat i fall 2 blir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(\sum_{n=1}^N Y_n/N - m)^2] &= \frac{1}{N}\mathbb{E}[(Y_1 - m)^2] \\
&= \frac{1}{N}\mathbb{E}[(Y_1^2 - 2Y_1 m + m^2] \\
&= \frac{1}{N}\int_0^1 \Big(\int_0^{f(x_1)} dx_2 - 2\int_0^{f(x_1)} dx_2 m + m^2\Big)dx_1 \\
&= \frac{1}{N}\Big(\int_0^1 f(x_1)dx_1 - 2m\int_0^1 f(x_1)dx_1 + m^2\Big) \\
&= \frac{m - m^2}{N}
\end{aligned}$$

Vi ser att variansen i fall 1 är mindre än i fall 2 eftersom

$$\int_0^1 f^2(x)dx - (\int_0^1 f(x)dx)^2 \le \int_0^1 f(x)dx - (\int_0^1 f(x)dx)^2$$

ty $0 \le f(x) \le 1$ *och i fall 2 krävs* $2N$ *slumptal så metod 1 har minst förväntat fel.*

Alternativ uppgift 2. (20p) Formulera och bevisa en sats om konditionstal för lösning av linjära ekvationsystem.

3. Antalet fiskar $x(t)$ i ett bestånd vid tiden t, som fiskas med fångst $\alpha(t)$ per tidsenhet, modelleras av

$$\frac{dx(t)}{dt} = f\big(x(t), \alpha(t)\big), \quad t > 0$$

där $f(x,\alpha)=(5-x)x-\alpha$ och $x(0)=1$. Målet är att bestämma funktionen α så att inkomsten $\int_0^1 \frac{\alpha(t)}{1+\alpha(t)}dt + x(1)$ maximeras, där $\frac{1}{1+\alpha(t)}$ är fiskpriset (per fisk) och $x(1)$ modellerar värdet av återstående bestånd (vid tiden 1).

3a. (10p) Formulera en numerisk metod för att bestämma den optimal fångsten $\alpha(t)$ för $0 < t < 1$.

3b. (5p) Antag att beståndets begynnelsevärde $x(0)$ inte är precis känt utan behäftat med 10% fel. Beskriv hur du nu går till väga för att avgöra hur stort felet är i din approximation av optimal fångst $\alpha(t)$, förutsatt att du har en numerisk metod för att bestämma en approximation av $\alpha(t)$ från uppgift 3a.

3a. Med indelningen $t_n = n\Delta t$, $n = 0,1,2,\ldots,N$, där $\Delta t = 1/N$, och approximationen $x_n \simeq x(t_n)$ och $\alpha_n \simeq \alpha(t_n)$ har vi Eulers metod för differentialekvationen

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + \Delta t f(x_n,\alpha_n), \quad n = 0,1,2,\ldots,N-1\\
x_0 &= 1\,.
\end{aligned}
$$

Lagrangefunktionen för minimeringen (med $g(x) = x$)

$$
L(x,\alpha,\lambda) = \sum_{n=0}^{N-1}\Big(\frac{\alpha_n}{1+\alpha_n}\Delta t - \lambda_{n+1}\big(x_{n+1} - x_n - \Delta t f(x_n,\alpha_n)\big)\Big) + g(X_N)\,,
$$

ger villkoren

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial L}{\partial \alpha_m} = \big(\frac{d}{d\alpha_m}\frac{\alpha_m}{1+\alpha_m} - \lambda_{m+1}\underbrace{\frac{\partial f(x_m,\alpha_m)}{\partial \alpha_m}}_{=1}\big)\Delta t, \quad m = 0,1,2,\ldots N-1,\\
0 &= \frac{\partial L}{\partial x_k} = -\lambda_k + \lambda_{k+1} + \Delta t\frac{\partial f(x_k,\alpha_k)}{\partial x_k}\lambda_{k+1}\,, \quad k = 1,2,\ldots,N-1,\\
0 &= \frac{\partial L}{\partial x_N} = -\lambda_N + g'(x_N)\,,\\
0 &= \frac{\partial L}{\partial \lambda_{n+1}} = x_{n+1} - x_n - \Delta t f(x_n,\alpha_n), \quad n = 0,1,2,\ldots,N-1.
\end{aligned}
$$

Första ekvationen medför att $1/(1+\alpha_m)^2 = \lambda_{m+1}$ så $\alpha_m = \lambda_{m+1}^{-1/2} - 1$. (Värdena λ_m är positiva för tillräckligt små Δt, eftersom $\lambda_N = 1$ och $\lambda_n = (1 + \frac{\Delta t \partial f(x_n,\alpha_n)}{\partial x})\lambda_{n+1}$.) Vi får då följande numeriska metod i form av systemet

$$
\begin{aligned}
\lambda_N &= g'(x_N),\\
\lambda_k &= \lambda_{k+1} + \Delta t\frac{\partial f(x_k,\lambda_{k+1}^{-1/2}-1)}{\partial x_k}\lambda_{k+1}\,, \quad k = 1,2,\ldots,N-1,\\
x_0 &= 1\,,\\
x_{n+1} &= x_n + \Delta t f(x_n,\lambda_{n+1}^{-1/2}-1), \quad n = 0,1,2,\ldots,N-1\,,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

som kan lösas iterativt genom att först välja startvärdet $x_n = x_0,\ n = 0, 1, \ldots, N$*, sedan successivt beräkna* λ_k *för* $k = N, N-1, \ldots, 1$ *och därefter* x_n *för* $n = 0, 1, 2, \ldots, N$ *och sedan igen* λ_k *och* x_n *tills ändringen av iterationerna i* x *blir tillräckligt liten.*

3b. Ett exempel på analys av felet är följande. Genom experimentell störningsräkning baserad på numerisk lösning av uppgift 3a med begynnelsevärde $x_0 = 1 + \xi_i$ *(istället för* $x_0 = 1$*) där* $\xi_i,\ i = 1, 2, 3 \ldots, I$*, är oberoende och likformigt fördelade på intervallet* $[-0.1, 0.1]$ *erhålls en familj av* I *stycken tillhörande approximationer* $\{\alpha[i]\}_{i=1}^{I}$ *av fångstfunktioner vars medelvärde och standardavvikelse beskriver noggrannheten i beräkningen av den optimal fångsten med avseende på störning i begynnelsedata. Vi kan t.ex. mäta felet i funktionen* α *med maximumnormen med avseende på tidstegen,* $\max_n |\alpha_n[i] - \alpha_n|$ *där* α_n *är lösningen utan störning. Felen från* Δt *och antal iterationer för att lösa ekvationsystemet* (1) *kan uppskattas genom att för fixt* ξ_i *välja successivt mindre* Δt *och betrakta resultatet från det minsta* Δt *som en approximation av det exakta svaret. Felet från antal iteration skattas från ändring i lösningen i varje iteration. Tidsteget* Δt *och antal iterationer väljs sedan så att felen från dessa är små jämfört med standardavvikelse från störning i begynnelsedata.*

Ett alternativ till att välja $x_0 = 1 + \xi_i$ *är att bara studera de maximal störningarna,* $x_0 = 1.1$ *och* $x_0 = 0.9$*.*