KTH Matematik

Namn: ....

Personnummer:.. **Program och årskurs:** ....

Tentamen del 1
Numeriska metoder SF1545
08.00-11.00 14/1 2016

Gränsen för betyg E är 14 poäng (inklusive bonuspoäng).

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).
Skriv svaren på detta papper.
Bonus. Ange dina bonuspoäng från kursomgången HT15 här:

1. (2p) Matlabkoden

```
N=100;
I=0;
for n=1:N
    I=I+exp(-n/N)/N;
end
display(I)
```

visar en approximation av

- [x] $\int_0^1 e^{-x}dx$
- [ ] $\int_{-1}^1 e^{-x^2}dx$
- [ ] e^{-1}
- [ ] $\int_0^1 e^{-x}dx/100$
- [ ] $1/\int_{-1}^1 e^{-x}dx$
- [ ] roten till $x + e^{-x} = 0$
- [ ] e^{-10}
- [ ] inget, eftersom koden ej fungerar.

2. (2p) Fixpunktiterationerna x_n, där

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}e^{-x_n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

och $x_0 = 1$,

- [ ] konvergerar ej, men förblir begränsade
- [ ] konvergerar mot lösningen till $e^x - x = 0$
- [x] konvergerar, där felet asymptotiskt reduceras med en faktor som har beloppet mindre än 1.
- [ ] divergerar mot oändligheten
- [ ] har kvadratisk konvergens
- [ ] konvergerar mot $x = 1$.

3. (2p) Matlabkoden

```
f =@(x) x-exp(-x);
fp=@(x) 1+exp(-x);

x=1;
for n=1:10
    x=x-f(x)/fp(x);
end
display(x)
```

☒ visar en approximation med Newtons metod för lösning av ekvationen $x - e^{-x} = 0$

☐ visar en approximation med fixpunktiterationer för lösning av ekvationen $x = \frac{x-e^{-x}}{1+e^{-x}}$

☐ visar en approximation av Newtonmetoden för lösning av $x = e^x$

☐ fungerar ej.

4. (2p) Anta att 2×2 matrisen A ges av $A = \begin{bmatrix} 10^{-4} & 3 \\ 3 & 10^5 \end{bmatrix}$. Då är dess invers $A^{-1} = \begin{bmatrix} 10^5 & -3 \\ -3 & 10^{-4} \end{bmatrix}$. Låt $x \in \mathbb{R}^2$ lösa det linjära ekvationssystemet $Ax = b$ och $x + \Delta x$ lösa systemet med en störning i högerledet, $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$. Hur stor får den maximala relativa störningen, $\|\Delta b\|_\infty / \|b\|_\infty$, högst vara (med en siffras noggrannhet) för att ha det maximala relativa felet, $\|\Delta x\|_\infty / \|x\|_\infty$, begränsat av 10^{-4}?

☐ 10^{-1} ☐ 10^{-8} ☐ 10^{-16}

☐ 10^{-2} ☐ 10^{-10} ☐ 10^{-18}

☐ 10^{-4} ☐ 10^{-12} ☐ 10^{-20}

☐ 10^{-6} ☒ 10^{-14} ☐ 10^{-22}

Här är normen av $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ definerad av $\|v\|_\infty = \max(|v_1|, |v_2|)$.

5. (2) Givet ekvationen

$$x^{100} - 0.01x = 1$$

och en approximativ lösning $x_* = 1$. Hur stort är felet i denna approximativa lösning ungefär?

☐ 10^{-6} ☐ 1

☒ 10^{-4} ☐ 10^2

☐ 10^{-2} ☐ 10^4

6. (3p) Antag att funktionen $z : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ löser differentialekvationen

$$\frac{d^2 z(t)}{dt^2} + 10 z(t) = 10t, \quad t > 0$$

med begynnelsvillkoren $z(0) = 0$ och $z'(0) = 1$. Då blir approximationen av $z'(0.02)$ med framåt Eulermetoden och steglängd $\Delta t = 0.01$

- ☐ 10
- ☒ 1
- ☐ 0.1
- ☐ 0.01
- ☐ 0.02
- ☐ 0.04
- ☐ något annat

7. (2p) En numerisk metod för lösning av ekvationen $f(x) = 0$ skrivs

$$x_{n+1} = x_n + d_n\,.$$

Följande d_n-värden erhölls

$$10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-9}\,.$$

Metodens konvergensordning är

- ☐ 1
- ☒ 2
- ☐ 3
- ☐ 4
- ☐ metoden konvergar ej.

8. (3p) Det överbestämda ekvationssystemet $Ac = b$ skrivs

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 = 6 \\ c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 + c_2 = 4.5\,. \end{cases}$$

Dess lösning i minstakvadratmening bestäms av

- ☐ $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6.5 \end{bmatrix}$
- ☒ $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 16.5 \end{bmatrix}$
- ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 4.5 \end{bmatrix}$
- ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4.5 \end{bmatrix}$
- ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4.5 \end{bmatrix}$
- ☐ något annat

9. (2p) Trapetsmetoden med två lika stora intervall ger integralen $\int_1^3 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{dx}$ approximationen

- [ ] 15/24
- [ ] 16/24
- [x] 17/24
- [ ] 18/24
- [ ] 24/15
- [ ] 24/16
- [ ] 24/17
- [ ] något annat