KTH Matematik

Namn: ....

Personnummer:.. **Program och årskurs:** ....

Tentamen del 1
Numeriska metoder SF1545
08.00-11.00 16/3 2016

Gränsen för betyg E är 14 poäng (inklusive bonuspoäng).

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).
Skriv svaren på detta papper.
Bonus. Ange dina bonuspoäng från kursomgången HT15 här:

1. (2p) Matlabkoden

```
x=10;
for n=1:11
    x=1/(x+3/2);
end
display(x)
```

skriver ut ett tal på skärmen. Detta tal är närmast

- [ ] 1
- [ ] 3^{-1}
- [ ] 2
- [ ] 3
- [ ] 4
- [ ] 0
- [x] 2^{-1}
- [ ] ∞

2. (2p) Newtons metod för approximation av $x_* > 0$, där $e^{x_*} - x_* - 2 = 0$, med startgissningen $x_0 = 100$ ger nästa iteration x_1 närmast

- [ ] 1
- [ ] 90
- [ ] 10
- [ ] 0.9
- [ ] 100
- [ ] 9
- [ ] 110
- [x] 99

3. (3p) Fixpunktsiterationerna $x_{i+1} = g(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots$, med

$$g(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{3x - 1} \tag{A}$$

$$g(x) = \frac{1 + x - x^2 + 7x^3}{8x^2} \tag{B}$$

$$g(x) = \frac{1}{3x} + \frac{1}{3}(1 + 2x - x^2) \tag{C}$$

konvergerar lokalt mot roten $x^* = 1$ för $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$. Rangordna dem i hastighetsordning, med den som konvergerar snabbast först.

- [ ] (A), (B), (C)
- [ ] (B), (C), (A)
- [x] (A), (C), (B)
- [ ] (C), (A), (B)
- [ ] (B), (A), (C)
- [ ] (C), (B), (A)

4. (2p) Minstakvadratproblemet

$$\min_{x \in \mathbb{R}} \|Ax - b\|$$

där $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}$ och

$$\| \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

har lösningen x lika med

- [ ] $\frac{9}{10}$
- [ ] $\frac{89}{100}$
- [x] $\frac{91}{101}$
- [ ] 1
- [ ] $\frac{90}{101}$
- [ ] $\frac{10}{9}$

5. (2p) Antag att du vill lösa ett kvadratiskt linjärt ekvationssystem $Ax = b$ med N obekanta med hjälp av Gauss elimination, där A är en $N \times N$ matris med alla element nollskilda (dvs A är ej gles).

a) Välj det minsta tal α sådant att det finns en konstant C och antalet beräkningsoperationer i Gausseliminationen för alla N begränsas av CN^α:

- [ ] 1
- [ ] 2
- [x] 3
- [ ] 4

b) Om antalet obekanta fördubblas så kommer beräkningskostnaden att approximativt öka med en faktor

- [ ] 2
- [ ] 4
- [ ] 6
- [x] 8
- [ ] 12
- [ ] 16

6. (2p) Antag att punkterna (x, y) givna av tabellen

x	0.5	1	1.5	2.1
y	1.02	1.28	1.68	1.99

ska interpoleras med ett polynom av minimalt gradtal så att dess graf passerar genom alla punkterna.

a) Då erhålls ett linjärt ekvationssystem vars koefficientmatris har dimensionen

- ☐ 3×3
- ☒ 4×4
- ☐ 3×4
- ☐ 4×5
- ☐ 4×3
- ☐ 5×4

b) Polynomet som ansätts ska vara av gradtal

☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 5

7. (2p) Antag att du approximerat integralen

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

med trapetsmetoden med steglängd h och uppskattat felet. Om du vill minska felet med en faktor 100, hur bör du välja din steglängd?

- ☐ $\frac{h}{3}$
- ☒ $\frac{h}{10}$
- ☐ $\frac{h}{50}$
- ☐ $\frac{h}{5}$
- ☐ $\frac{h}{20}$
- ☐ $\frac{h}{100}$

8. (3p) Funktionerna $y_1(t)$ och $y_2(t)$ löser differentialekvationssystemet

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= 2y_1(t) + y_2(t) - 6\,, \\ y_2'(t) &= y_1(t) + y_2(t) + 2\,, \end{aligned}$$

med begynnelsevärdena $y_1(5) = 5$ och $y_2(5) = -10$.

Då gäller att $\big(y_1(5.2), y_2(5.2)\big)$ approximerat med framåt Euler metoden och steglängden 0.2 är

- ☐ $(5, -10)$
- ☐ $(2, -11)$
- ☐ $(4.5, -10)$
- ☒ $(3.8, -10.6)$
- ☐ $(3.9, -10.5)$
- ☐ något annat

9. (2p) Följande matlabfunktion är given:

```
function [a, b] = foo(a, b, c)
  if (a < b+c)
      while (a < 2*b)
          a=a+1;
          b=b-a;
      end
  else
      for i=1:c
          b = b-i;
      end
  end
end
```

Vilket värde är lagrat i variabeln `sumxyw` efter följande matlabanrop:

```
v=[1 2 -3];
v2=v.^2;
vs=sum(v2);
[x,y] = foo(1,vs,v2(2));
[z,w]=foo(v2(3),v2(2),3);
sumxyw=x+y+w;
```

☐ -3 ☐ 0 ☐ 2 ☒ 3 ☐ 4 ☐ 7 ☐ 9 ☐ 12