Institutionen för Matematik, KTH

Tentamen del 2
Numeriska metoder SF1545
8.00-11.00 16/3 2016

Inga hjälpmedel är tillåtna (ej heller miniräknare).

Råd för att undvika poängavdrag: Skriv lösningar med fullständiga meningar och utförliga motiveringar.

Del 2 rättas om denna tentamens del 1 är godkänd (godkänd KS räcker ej).

Betygsgränser inklusive bonuspoäng: D 10, C 20, B 30 och A 40 poäng.

Det finns två alternativa uppgifter 2; bara en av dem får lämnas in.

1. Utböjningen $u_j(x)$ i positionen x av en sträng uppfyller egenvärdesproblemet

$$
\begin{aligned}
-u_j''(x) + e^x u_j(x) &= \lambda_j u_j(x), \quad 0 < x < 1,\\
u_j(0) = u_j(1) &= 0,
\end{aligned} \tag{1}
$$

där $\lambda_j \in \mathbb{R}$ är egenvärdet med tillhörande egenfunktion $u_j : [0,1] \to \mathbb{R}$, för $j = 1, 2, 3, \ldots$.

1a. (10p) Formulera en finit differensmetod och ett egenvärdesproblem för en matris som approximerar egenvärdesproblemet (1).

1b. (10p) Skriv ett Matlabprogram som utför approximationen i uppgift 1a och skriver ut en approximation av $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^{-2}$. Du får använda matlabrutinen `eig` där kommandot `help eig` ger utskriften

```
eig Eigenvalues and eigenvectors.

E = eig(X) is a vector containing the eigenvalues of a square matrix X.

[V,D] = eig(X) produces a diagonal matrix D of eigenvalues and a full matrix V
whose columns are the corresponding eigenvectors so that X*V = V*D.
```

1a. Gör indelningen $x_n = n\Delta x$, $n = 0, 1, 2, \ldots, N+1$, med $\Delta x = 1/(N+1)$, och finit differensapproximationerna

$$
\begin{aligned}
\lambda &\simeq \lambda_j,\\
v_n &\simeq u_j(x_n),\\
\frac{v_{n+1} - 2v_n + v_{n+1}}{(\Delta x)^2} &\simeq u_j''(x_n).
\end{aligned}
$$

Ekvationen (1) approximeras då av

$$-\frac{v_{n+1}-2v_n+v_{n+1}}{(\Delta x)^2}+e^{x_n}v_n=\lambda v_n, \quad n=1,2,\ldots,N,$$
$$v_0=0,$$
$$v_{N+1}=0,$$

som kan skrivas som egenvärdesproblemet

$$Av=\lambda v$$

med $N\times 1$ *egenvektorn*

$$v=\begin{bmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_N \end{bmatrix}$$

och $N\times N$ *matrisen*

$$A_{mn}=\begin{cases} \frac{2}{\Delta x^2}+e^{x_n}, & n=m, \\ \frac{-1}{\Delta x^2}, & |n-m|=1, \\ 0, & \textit{annars.} \end{cases}$$

Vi har egenvärdesekvationen

$$(A-\lambda I)v=0,$$

där λ *och* v *är obekanta, som bestäms analytiskt av* $\det(A-\lambda I)=0$ *och numeriskt enligt uppgift 1b. Matrisen* I *är* $N\times N$ *enhetsmatrisen.*

1b. Ett exempel på matlabprogram är

```
N=100;
dx=1/(N+1);

A=zeros(N,N);
V=zeros(N,N);
D=zeros(N,N);

for n=2:N-1
    x=n*dx;
    A(n,n)=2/dx^2+exp(x);
    A(n,n+1)=-1/dx^2;
    A(n,n-1)=-1/dx^2;
end
A(1,1)=2/dx^2 + exp(dx);
A(N,N)=2/dx^2 + exp(N*dx);
A(1,2)=-1/dx^2;
A(N,N-1)=-1/dx^2;
```

```
[V,D]=eig(A);

s=0;
for n=1:N
    s=s+D(n,n)^(-2);
end
display(s)
```

2a. (7p) Fungerar Eulers metod för att approximera funktionen $y(x) = (\frac{4x}{5})^{5/4}$ som löser begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} y'(x) &= \big(y(x)\big)^{1/5}, \quad x > 0\,, \\ y(0) &= 0\,? \end{aligned}$$

Motivera ditt svar.

2b. (8p) Formulera en numerisk metod som approximerar lösningen till

$$\begin{aligned} y'(x) &= \big(y(x)\big)^{1/5}, \quad 0 < x \le 5/4\,, \\ y(5/4) &= 1\,. \end{aligned}$$

2a. Indelningen $x_n = n\Delta x$, med $\Delta x > 0$, och approximationen $y_n \simeq y(x_n)$ ger Eulers metod

$$\begin{aligned} y_0 &= 0, \\ y_1 &= y_0 + \Delta x y_0^{1/5} \end{aligned}$$

och $y_{n+1} = y_n + \Delta x y_n^{1/5}$ medför att alla $y_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Vi ser att $y_n = 0$ inte approximerar $(4x_n/5)^{1/5}$ för alla n.

2b. Indelningen $x_n = n\Delta x, n = 1, 2, \ldots, N$, med $\Delta x = 1/N$, och approximationen

$$\begin{aligned} y_n &\simeq y(x_n), \\ \frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta x} &\simeq y'(x_n), \\ y_N &= 1, \\ \frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta x} &= y_n^{1/5}, \quad n = N, N-1, \ldots, 2, \end{aligned}$$

ger den explicita metoden

$$\begin{aligned} y_N &= 1, \\ y_{n-1} &= y_n - \Delta x y_n^{1/5}, \quad n = N, N-1, \ldots, 2. \end{aligned}$$

Alternativ uppgift 2. (15p) Formulera och bevisa en sats om konvergens för Newtons metod.

3a. (5p) Formulera en Monte Carlometod som approximerar arean innanför ellipsen

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

genom att generera likformigt fördelade slumptal i rektangeln $[-2, 2] \times [-1, 1]$.

3b. (10p) Skriv ett matlabprogram som utför approximationen i uppgift 3a.

3a. Låt x_n och y_n, $n = 1, 2, \ldots,$ vara oberoende likformigt fördelade stokastiska variabler, där x_n är likformigt fördelad på $[-2, 2]$ och y_n är likformigt fördelad på $[-1, 1]$. Definiera funktionen

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & \textit{om } \frac{x^2}{4} + y^2 < 1, \\ 0, & \textit{annars.} \end{cases}$$

En Monte Carlo approximation av ellipsens area ges av

$$\frac{A_e}{A_r} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{N} f(x_n, y_n)$$

där A_e är en approximation av ellipsens area och $A_r = 8$ är arean av rektangeln $[-2, 2] \times [-1, 1]$.

3b. Ett exempel på matlabprogram är

```
N=10000;
s=0;
for n=1:N
    x=4*rand-2;
    y=2*rand-1;
    if(x*x/4+y*y-1 < 0)
        s=s+8/N;
    end
end
display(s)
```