

1. Analys av ett resistansnätverk med hjälp av kvadratisk optimering

Krister Svanberg, 4 dec 2003.

I detta avsnitt ska vi analysera ett givet resistansnätverk bestående av fem stycken *noder*, numrerade från 1 till 5, samt sju stycken *länkar* mellan vissa par av noderna.

En länk som förbinder noderna i och j , där $i < j$, betecknas (i, j) .

Det nätverk vi ska analysera består av följande mängd av länkar:

$$\mathcal{L} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (3, 5), (4, 5)\}.$$

På varje länk $(i, j) \in \mathcal{L}$ sitter ett motstånd med en given resistans R_{ij} (Ohm).

Antag nu att vi skickar strömmen 1 (Ampere) genom nätverket, från noden 1 till noden 5. Detta förorsakar länkströmmar x_{ij} (Ampere), i de olika länkarna. Om strömmen i länk (i, j) är riktad från nod i till nod j så är $x_{ij} > 0$, medan om strömmen i länk (i, j) är riktad från nod j till nod i så är $x_{ij} < 0$.

Vi ska här visa att dessa länkströmmar kan erhållas som lösningen till ett visst kvadratisk optimeringsproblem.

Till att börja med har vi följande fem villkor för strömbalanser i de olika noderna:

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & x_{12} + x_{13} \quad \text{ström in till nod 1} = \text{ström ut från nod 1} \\ x_{12} & = & x_{23} + x_{24} \quad \text{ström in till nod 2} = \text{ström ut från nod 2} \\ x_{13} + x_{23} & = & x_{34} + x_{35} \quad \text{ström in till nod 3} = \text{ström ut från nod 3} \\ x_{24} + x_{34} & = & x_{45} \quad \text{ström in till nod 4} = \text{ström ut från nod 4} \\ x_{35} + x_{45} & = & 1 \quad \text{ström in till nod 5} = \text{ström ut från nod 5} \end{array}$$

Detta kan kortfattat skrivas $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, där $\mathbf{x} = (x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{24}, x_{34}, x_{35}, x_{45})^T$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{och} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Men detta ekvationssystem har oändligt många lösningar, så det räcker inte för att bestämma \mathbf{x} entydigt. Vi måste också använda oss av Ohms lag som säger att spänningsfallet över ett motstånd ges av produkten av resistansen och strömmen genom motståndet.

Vi ansätter därför (obekanta) nodpotentialer u_i (Volt) i de olika noderna.

Spänningsfallet s_{ij} (Volt) på länken $(i, j) \in \mathcal{L}$ ges då av $s_{ij} = u_i - u_j$.

Detta kan skrivas $\mathbf{s} = \mathbf{A}^T \mathbf{u}$, där $\mathbf{s} = (s_{12}, s_{13}, s_{23}, s_{24}, s_{34}, s_{35}, s_{45})^T$,

$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)^T$, och där \mathbf{A} är samma matris som ovan!

Vi behöver ytterligare en uppsättning villkor, nämligen det ovannämnda sambandet mellan spänningsfall och ström, dvs Ohms lag, som säger att $s_{ij} = R_{ij}x_{ij}$ för alla $(i, j) \in \mathcal{L}$.

Detta kan skrivas $\mathbf{s} = \mathbf{R}\mathbf{x}$, där \mathbf{R} är en diagonalmatris med diagonalelementen R_{ij} , $(i, j) \in \mathcal{L}$.

Sammanfattningsvis har vi följande samband: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{s} = \mathbf{A}^T \mathbf{u}$ och $\mathbf{s} = \mathbf{Rx}$.

Här kan vektorn \mathbf{s} elimineras, varefter vi får följande ekvationssystem i \mathbf{x} och \mathbf{u} :

$$\begin{aligned} \mathbf{Rx} - \mathbf{A}^T \mathbf{u} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Eftersom matrisen \mathbf{R} är positivt definit så är ovanstående ekvationssystem ekvivalent med följande kvadratiske optimeringsproblem under linjära bivillkor (se exempelvis avsnitt 12.2 i Gröna häftet):

$$\begin{aligned} \text{minimera } & \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Rx} \\ \text{då } & \mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Bland alla vektorer \mathbf{x} som uppfyller strömbalansvillkoren $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ så väljer alltså naturen den vektor \mathbf{x} som minimerar den kvadratiske funktionen $\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{Rx}$. Denna målfunktion kan tolkas som (halva) totala effektförlusten, ty $\mathbf{x}^T \mathbf{Rx} = \sum R_{ij} x_{ij}^2$.

Vi antar för enkelhets skull att $R_{ij} = 1$ för alla $(i, j) \in \mathcal{L}$, så att $\mathbf{R} = \mathbf{I} =$ enhetsmatrisen.

Först löser vi optimeringsproblemet (1.2) genom att lösa ekvationssystemet (1.1).

Ur $\mathbf{Rx} - \mathbf{A}^T \mathbf{u} = \mathbf{0}$ (med $\mathbf{R} = \mathbf{I}$) erhålls att $\mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{u}$, som insatt i $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ger oss ekvationssystemet $\mathbf{AA}^T \mathbf{u} = \mathbf{b}$.

$$\text{I vårt fall är } \mathbf{AA}^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Gauss-Jordans metod ger efter några radoperationer att lösningarna till $\mathbf{AA}^T \mathbf{u} = \mathbf{b}$ ges av $\mathbf{u} = (8/7, 5/7, 4/7, 3/7, 0)^T + t \cdot (1, 1, 1, 1, 1)^T$, där t är ett godtyckligt reellt tal. För samtliga dessa lösningar gäller att $\mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{u} = (3/7, 4/7, 1/7, 2/7, 1/7, 4/7, 3/7)^T$. Länkströmmarna x_{ij} är alltså entydiga trots att inte nodpotentialerna u_i är det.

Nu löser vi i stället optimeringsproblemet (1.2) med hjälp av en nollrumsmetod.

Gauss-Jordans metod på ekvationssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, ger att *en* tillåten lösning ges av $\bar{\mathbf{x}} = (0, 1, 0, 0, 0, 1, 0)^T$, medan en bas till underrummet $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ ges av de tre vektorerna $\mathbf{z}_1 = (1, -1, 1, 0, 0, 0, 0)^T$, $\mathbf{z}_2 = (-1, 1, 0, -1, 1, 0, 0)^T$ och $\mathbf{z}_3 = (1, -1, 0, 1, 0, -1, 1)^T$. Låt matrisen \mathbf{Z} ha dessa tre basvektorer till kolonner, dvs $\mathbf{Z} = [\mathbf{z}_1 \ \mathbf{z}_2 \ \mathbf{z}_3]$.

Därefter bestäms vektorn \mathbf{v} ur ekvationssystemet $\mathbf{Z}^T \mathbf{RZ} \mathbf{v} = -\mathbf{Z}^T \bar{\mathbf{x}}$, där

$$\mathbf{Z}^T \mathbf{RZ} = \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -3 \\ 2 & -3 & 5 \end{bmatrix} \text{ och } \mathbf{Z}^T \bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ med lösningen } \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1/7 \\ 1/7 \\ 3/7 \end{pmatrix}.$$

Slutligen erhålls den optimala lösningen till problemet (1.2) ur

$$\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{Zv} = (3/7, 4/7, 1/7, 2/7, 1/7, 4/7, 3/7)^T.$$