Formelblad som delas ut på tentan i 5B1760.

$\mathbf{A}$ $m \times n$, $\dim \mathcal{R}(\mathbf{A}) = r$, $\dim \mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) = r$, $\dim \mathcal{N}(\mathbf{A}) = n - r$, $\dim \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T}) = m - r$.

$\mathcal{R}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$, $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})^\perp = \mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A})^\perp = \mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})^\perp = \mathcal{R}(\mathbf{A})$.

Simplexmetoden för LP-problem på formen: minimera $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ då $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$.

$\mathbf{A}_\alpha \mathbf{x} = \mathbf{b}_\alpha$, $\mathbf{A}_\alpha^\mathsf{T} \mathbf{u} = \mathbf{c}$, $\mathbf{s}_\gamma = \mathbf{A}_\gamma \mathbf{x} - \mathbf{b}_\gamma$. Stopp om $\mathbf{u} \geq \mathbf{0}$.

Välj $u_q < 0$. $\mathbf{A}_\alpha \mathbf{d} = \mathbf{e}_q$, $\mathbf{g}_\gamma = \mathbf{A}_\gamma \mathbf{d}$. Stopp om $\mathbf{g}_\gamma \geq \mathbf{0}$.

$\hat{t} = \min\limits_j \left\{ \dfrac{s_{\gamma_j}}{-g_{\gamma_j}} \mid g_{\gamma_j} < 0 \right\} = \dfrac{s_{\gamma_p}}{-g_{\gamma_p}}$. $\mathbf{x} + \hat{t} \cdot \mathbf{d}$ ny hörnlösning. α_q och γ_p byter plats.

P: minimera $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x}$ då $\mathbf{A}\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$ och $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. D: maximera $\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}$ då $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y} \leq \mathbf{c}$ och $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$.

Komplementaritetsvillkor: $y_i s_i = 0$ och $x_j r_j = 0$, där $\mathbf{s} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}$ och $\mathbf{r} = \mathbf{c} - \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{y}$.

$\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}) = \mathcal{N}(\mathbf{A})$, $\mathcal{N}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}) = \mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$, $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$, $\mathcal{R}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}) = \mathcal{R}(\mathbf{A})$.

$\mathbf{A}$ symmetrisk och positivt definit $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^\mathsf{T}$, där $\mathbf{L}$ är nedåt vänstertriangulär med alla $l_{ii} = 1$ medan $\mathbf{D}$ är diagonal med alla $d_i > 0$.

minimera $\frac{1}{2}\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} + \gamma$ då $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. $\mathbf{H}$ psd. $\mathbf{H}\hat{\mathbf{x}} = -\mathbf{c}$.

minimera $\frac{1}{2}\mathbf{x}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{x} + \gamma$ då $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$. $\hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} + \mathbf{Z}\hat{\mathbf{v}}$. $\mathbf{Z}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{Z}$ psd.

$(\mathbf{Z}^\mathsf{T}\mathbf{H}\mathbf{Z})\hat{\mathbf{v}} = -\mathbf{Z}^\mathsf{T}(\mathbf{H}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{c})$. Alternativt $\begin{bmatrix} \mathbf{H} & -\mathbf{A}^\mathsf{T} \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{u}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{c} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$.

MN-lösning till MK-problem: $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{b}$, $\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{p} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\hat{\mathbf{u}}$.

Beroende på förutsättningarna så gäller någon eller några av formlerna

$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}$. $\mathbf{A}^+ = (\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^\mathsf{T}$. $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^\mathsf{T}(\mathbf{A}\mathbf{A}^\mathsf{T})^{-1}$. $\mathbf{A}^+ = \mathbf{C}^\mathsf{T}(\mathbf{C}\mathbf{C}^\mathsf{T})^{-1}(\mathbf{B}^\mathsf{T}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\mathsf{T}$.

Gram-Schmidt: $\mathbf{p}_1 = \mathbf{a}_1$, $\mathbf{q}_1 = \mathbf{p}_1/|\mathbf{p}_1|$, $\mathbf{p}_k = \mathbf{a}_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1} \mathbf{q}_i(\mathbf{q}_i^\mathsf{T}\mathbf{a}_k)$, $\mathbf{q}_k = \mathbf{p}_k/|\mathbf{p}_k|$,

ger till resultat $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R}$, där $r_{ii} = |\mathbf{p}_i|$ och $r_{ij} = \mathbf{q}_i^\mathsf{T}\mathbf{a}_j$ för $j > i$.

$\mathbf{H}$ symmetrisk $\Rightarrow$ $\mathbf{H} = \mathbf{Q}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{Q}^\mathsf{T}$, där $\mathbf{Q}$ är ortogonal och $\boldsymbol{\Lambda}$ är diagonal.

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1^\mathsf{T} \\ \mathbf{V}_2^\mathsf{T} \end{bmatrix} = \mathbf{U}_1\mathbf{S}_1\mathbf{V}_1^\mathsf{T} = \sum_{j=1}^{r} \mathbf{u}_j \sigma_j \mathbf{v}_j^\mathsf{T}. \quad \mathbf{A}^+ = \mathbf{V}_1\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{U}_1^\mathsf{T}.$$

För $j = 1, \ldots, r$: $\mathbf{A}^\mathsf{T}\mathbf{A}\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_j\lambda_j$, $\sigma_j = \sqrt{\lambda_j}$, $\mathbf{u}_j = \mathbf{A}\mathbf{v}_j\sigma_j^{-1}$, vilket ger $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{S}_1$ och $\mathbf{U}_1$.

$\mathbf{v}_{r+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ en ortonormal bas till $\mathcal{N}(\mathbf{A})$. $\mathbf{u}_{r+1}, \ldots, \mathbf{u}_m$ en ortonormal bas till $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$.