KUNGL TEKNISKA HÖGSKOLAN

Institutionen för Matematik
Avdelningen för Optimeringslära och systemteori

Hemuppgift 1 5B1760 Linjär och kvadratisk optimering 2003/2004.
Inlämnas senast torsdag 6 november 2003 kl. 12.00.

Examinator: Krister Svanberg, tel 790 71 37

Ange namn, personnummer och *e-postadress* på rapportens framsida.

I denna uppgift är samarbete tillåtet vid utformningen av Matlab-beräkningarna, men sedan ska varje student *själv*, med egna ord, skriva en kortfattad rapport i vilken redovisas hur uppgiften lösts och vad resultaten blev. Kopiering av någon annans rapport är inte tillåtet! Matlab-kod och utskrifter ska bifogas. Vissa studenter kommer (delvis slumpmässigt) att väljas ut för enskild muntlig redovisning av uppgifterna. Kallelse sker via e-post, så kontrollera regelbundet denna.

1.1. Givet en 7×5–matris $\mathbf{A}$ som du ska välja på följande sätt. Låt $d \in \{1,2,\ldots,31\}$ vara den dag i månaden som du är född och låt $k \in \{0,1,\ldots,14\}$ vara den rest som erhålls när man dividerar d med 15. Som matris $\mathbf{A}$ ska du välja den av matriserna $\mathbf{A}_k$ nedan som svarar mot denna rest k. Matrisen kan hämtas på kursens hemsida `http://www.math.kth.se/optsyst/studinfo/5B1760/`

Transformera matrisen $\mathbf{A}$ till trappstegsform med hjälp av funktionen `rref` i Matlab (dvs Gauss-Jordans metod) tillämpad på den partitionerade matrisen $[\mathbf{A}\ \ \mathbf{I}]$.
Bestäm därefter, utgående från resultatet av denna transformation, fyra matriser $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$, $\mathbf{V}_3$ och $\mathbf{V}_4$ sådana att
kolonnerna i $\mathbf{V}_1$ utgör en bas till underrummet $\mathcal{R}(\mathbf{A})$,
kolonnerna i $\mathbf{V}_2$ utgör en bas till underrummet $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$,
kolonnerna i $\mathbf{V}_3$ utgör en bas till underrummet $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$
och kolonnerna i $\mathbf{V}_4$ utgör en bas till underrummet $\mathcal{N}(\mathbf{A})$.
Du ska vidare bestämma rangen r för $\mathbf{A}$ samt bestämma två matriser $\mathbf{B}$ och $\mathbf{C}$ sådana att $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$, där $\mathbf{B}$ är en $7\times r$–matris och $\mathbf{C}$ är en $r\times5$–matris.
Kontrollera att $\mathbf{BC}$ verkligen blir $\mathbf{A}$.

Transformera nu i stället matrisen $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ till trappstegsform med hjälp av funktionen `rref` i Matlab, tillämpad på den partitionerade matrisen $[\mathbf{A}^\mathsf{T}\ \ \mathbf{I}]$.
Bestäm därefter, utgående från resultatet av denna transformation, fyra matriser $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_2$, $\mathbf{W}_3$ och $\mathbf{W}_4$ sådana att
kolonnerna i $\mathbf{W}_1$ utgör en bas till underrummet $\mathcal{R}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$,
kolonnerna i $\mathbf{W}_2$ utgör en bas till underrummet $\mathcal{N}(\mathbf{A})$,
kolonnerna i $\mathbf{W}_3$ utgör en bas till underrummet $\mathcal{R}(\mathbf{A})$
och kolonnerna i $\mathbf{W}_4$ utgör en bas till underrummet $\mathcal{N}(\mathbf{A}^\mathsf{T})$.
Du ska vidare bestämma rangen r för $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ samt bestämma två matriser $\mathbf{G}$ och $\mathbf{H}$ sådana att $\mathbf{A}^\mathsf{T} = \mathbf{GH}$, där $\mathbf{G}$ är en $5\times r$–matris och $\mathbf{H}$ är en $r\times7$–matris.
Kontrollera att $\mathbf{GH}$ verkligen blir $\mathbf{A}^\mathsf{T}$.

Beräkna följande matrisprodukter och verifiera att resultatet stämmer med teorin:
$\mathbf{V}_1^\mathsf{T}\mathbf{V}_2,\ \mathbf{V}_3^\mathsf{T}\mathbf{V}_4,\ \mathbf{W}_1^\mathsf{T}\mathbf{W}_2,\ \mathbf{W}_3^\mathsf{T}\mathbf{W}_4,\ \mathbf{V}_1^\mathsf{T}\mathbf{W}_4,\ \mathbf{V}_2^\mathsf{T}\mathbf{W}_3,\ \mathbf{V}_3^\mathsf{T}\mathbf{W}_2$ och $\mathbf{V}_4^\mathsf{T}\mathbf{W}_1$.

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 7 & 1 \\ 5 & 3 & 6 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 7 & 9 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 7 & 1 \\ 6 & 3 & 6 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 7 \\ 7 & 4 & 7 & 9 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 6 & 2 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 & 7 & 1 \\ 7 & 3 & 6 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 7 \\ 8 & 4 & 7 & 9 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 7 & 2 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 6 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 7 \\ 4 & 4 & 7 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & 7 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_5 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 6 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 7 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_6 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 3 & 3 & 6 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 7 \\ 4 & 4 & 7 & 8 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_7 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & 7 & 8 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_8 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 5 & 3 & 6 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 7 & 8 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_9 = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 & 6 & 1 \\ 6 & 3 & 6 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 7 \\ 7 & 4 & 7 & 8 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 6 & 2 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{10} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 7 & 1 \\ 3 & 3 & 6 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 7 \\ 4 & 4 & 7 & 9 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{11} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 8 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & 7 & 9 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 2 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 7 \\ 4 & 4 & 7 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 2 & 4 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{13} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 7 \\ 4 & 4 & 7 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}_{14} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & 7 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Lycka till!