KUNGL
TEKNISKA
HÖGSKOLAN

Institutionen för Matematik
Avdelningen för Optimeringslära och systemteori

Hemuppgift 2 i 5B1760 Linjär och kvadratisk optimering 2003/2004.
Inlämnas senast måndag 17 november 2003 kl. 16.00.

---

Examinator: Krister Svanberg, tel 790 71 37

Ange namn, personnummer och *e-postadress* på rapportens framsida.

I denna uppgift är samarbete tillåtet vid utformningen av Matlab-beräkningarna, men sedan ska varje student *själv*, med egna ord, skriva en kortfattad rapport i vilken redovisas hur uppgiften lösts och vad resultaten blev. Kopiering av någon annans rapport är inte tillåtet! Matlab-kod och utskrifter ska bifogas. Vissa studenter kommer (delvis slumpmässigt) att väljas ut för enskild muntlig redovisning av uppgifterna. Kallelse sker via e-post, så kontrollera regelbundet denna.

---

**2.1.** Givet en $5\times4$ matris $\mathbf{A}$ samt två vektorer $\mathbf{b}\in I\!R^5$ och $\mathbf{c}\in I\!R^4$ .
Det *primala* LP-problemet P svarande mot $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$ definieras av

$$\begin{array}{lrl} \mathrm{P}: & \text{minimera} & \mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x} \\ & \text{då} & \mathbf{A}\mathbf{x}\geq\mathbf{b} \\ & & \mathbf{x}\geq\mathbf{0} \end{array}$$

där $\mathbf{x}\in I\!R^4$ är variabelvektorn.

Din första uppgift består i att skriva en m–fil i Matlab som för givna $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$, med dimensioner enligt ovan, *dels* räknar upp samtliga sätt att välja ut 4 bivillkor bland de 9 bivillkoren i problemet P, *dels* undersöker vilka av dessa val som leder till en tillåten baslösning $\mathbf{x}$. Som resultat skall erhållas:

$p =$ ett heltal som anger antalet tillåtna baslösningar till problemet P.
$\mathbf{X} = [\ \mathbf{x}^{(1)}\ \cdots\ \mathbf{x}^{(p)}\ ] =$ en $4\times p$ matris med de tillåtna baslösningarna till kolonner.
$\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{X} =$ en radvektor med de tillåtna baslösningarnas målfunktionsvärden.
$v = \min\limits_k\{\mathbf{c}^{\mathsf{T}}\mathbf{x}^{(k)}\} =$ optimalvärdet till det primala problemet P.

För att kunna tillämpa definitionen av tillåten baslösning i enlighet med kapitel 4 i Gröna häftet är det lämpligt att skriva bivillkoren i problemet P ovan på formen
$\mathbf{H}\mathbf{x}\geq\mathbf{h}$, med $\mathbf{H}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}\\ \mathbf{I}\end{bmatrix}$ och $\mathbf{h}=\begin{pmatrix}\mathbf{b}\\ \mathbf{0}\end{pmatrix}$.
Användbara matlab-kommandon är bland annat `nchoosek` och `setdiff`.

**2.2.** Det *duala* LP-problemet D svarande mot $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$ enligt ovan definieras av

$$\begin{array}{lrl} \mathrm{D}: & \text{maximera} & \mathbf{b}^{\mathsf{T}}\mathbf{y} \\ & \text{då} & \mathbf{A}^{\mathsf{T}}\mathbf{y}\leq\mathbf{c} \\ & & \mathbf{y}\geq\mathbf{0} \end{array}$$

där $\mathbf{y}\in I\!R^5$ är variabelvektorn.

Din nästa uppgift består i att skriva en m–fil i Matlab som för givna $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$, med dimensioner enligt ovan, *dels* räknar upp samtliga sätt att välja ut 5 bivillkor bland de 9 bivillkoren i problemet D, *dels* undersöker vilka av dessa val som leder till en tillåten baslösning $\mathbf{y}$. Som resultat skall erhållas:

$d =$ ett heltal som anger antalet tillåtna baslösningar till problemet D.
$\mathbf{Y} = [\ \mathbf{y}^{(1)}\ \cdots\ \mathbf{y}^{(d)}\ ] =$ en $5\times d$ matris med de tillåtna baslösningarna till kolonner.
$\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{Y} =$ en radvektor med de tillåtna baslösningarnas målfunktionsvärden.
$w = \max_k\{\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{y}^{(k)}\} =$ optimalvärdet till det duala problemet D.

För att kunna tillämpa definitionen av tillåten baslösning i enlighet med kapitel 4 i Gröna häftet är det lämpligt att skriva bivillkoren i problemet D ovan på formen $\mathbf{G}\mathbf{y} \geq \mathbf{g}$, med $\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}^\mathsf{T} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$ och $\mathbf{g} = \begin{pmatrix} -\mathbf{c} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$.
Användbara matlab-kommandon är bland annat `nchoosek` och `setdiff`.

**2.3.** Generera $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ och $\mathbf{c}$ på följande sätt, där du byter ut 111111 mot de sex första siffrorna i ditt födelsenummer.

```
>> rand('state',111111)
>> A = rand(5,4)
>> b = 4*ones(5,1) + rand(5,1)
>> c = 5*ones(4,1) + rand(4,1)
```

Beräkna och skriv ut motsvarande $p$, $\mathbf{X}$, $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{X}$, $v$, $d$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{Y}$ och $w$.

**2.4.** Upprepa minst 10 gånger de tre raderna

```
>> A = rand(5,4)
>> b = 4*ones(5,1) + rand(5,1)
>> c = 5*ones(4,1) + rand(4,1)
```

Mellan varje upprepning ska du beräkna $p$, $d$, $v$ och $w$ med hjälp av dina m–filer. Sammanställ resultaten i en tabell, där varje rad svarar mot en ny upprepning och innehåller de fyra talen $p$, $d$, $v$ och $w$. Men skriv *inte* ut $\mathbf{X}$, $\mathbf{c}^\mathsf{T}\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ och $\mathbf{b}^\mathsf{T}\mathbf{Y}$ på papper. Kommentera gärna resultatet.

*Lycka till!*

*Anmärkning:* Du har här löst några LP-problem med en primitiv uppräkningsmetod. Detta är möjligt enbart för relativt små problem. Om matrisen $\mathbf{A}$ ovan är av storleksordningen $100\times 100$ så blir lösningstiden orimlig (säkert $>$ 100 år). Lyckligtvis finns det bättre metoder, exempelvis simplexmetoden.